БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

МАТЕМАТИКА

Я. С. БРОДСКИЙ, А. К. СЛИПЕНКО

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Киев
Головное издательство
издательского объединения «Вища школа»
1983

22.193
Б88

УДК 517.948

Функциональные уравнения. Бродский Я. С., Слипенко А. К.— К.: Вища школа. Головное изд-во, 1983.— 96 с.—(Б-чка физ.-мат. школы. Математика).

В книге изложены элементарные методы решения функциональных уравнений, т. е. уравнений, в которых требуется найти неизвестную функцию, удовлетворяющую определенным соотношениям. К таким уравнениям приводят различные задачи математики, механики, физики. При решении этих уравнений используются такие важнейшие понятия алгебры и математического анализа, как группа, матрица, непрерывность, дифференцируемость и т. д. Книга содержит упражнения для самостоятельной работы. Для ее чтения достаточно знания школьного курса математики.

Рассчитана на учащихся физико-математических и средних общеобразовательных школ. Она может быть использована учителями математики при проведении факультативных занятий и внеклассной работы, а также студентами младших курсов.

Табл. 6 Ил. 15. Библиогр.: 9 назв. Прил. 1.

Рецензент кандидат физико-математических наук *А. А. Курченко* (Киевский государственный университет)

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Е. Л. Корженевич*

$Б\frac{1702050000-303}{М211(04)-83}$ БЗ—10—11—83

ВВЕДЕНИЕ

Понятие функции является важнейшим в современной математике.

Напомним, что *числовой функцией* f называется отображение подмножества D множества $\boldsymbol{R}$ на подмножество E множества $\boldsymbol{R}$.

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения*, а $E = E(f)$ — *множеством значений* функции f.

Число исходных, основных функций, изучаемых в школьном курсе математики, сравнительно невелико. К ним, например, относятся линейная, степенная, показательная, некоторые тригонометрические функции. Многие другие функции получаем из основных при помощи композиции.

Так, функция $f(x) = \sin(2x + 1)$ является композицией линейной $g(x) = 2x + 1$ и тригонометрической $h(x) = \sin x$ функций, т. е.

$$f(x) = h(g(x)) = h \circ g(x).$$

Функция $f(x) = \lg \arcsin x$ получена в результате композиции функций $g(x) = \arcsin x$ и $h(x) = \lg x$. Обратим внимание на то, что в область определения композиции $h \circ g$ входят те значения x из $D(g)$, для которых $g(x) \in D(h)$. В последнем примере $D(g) = [-1;\ 1]$, $D(h) =]0;\ \infty[$. Так как $\arcsin x > 0$ при $x \in]0;\ 1]$, то $D(f) =]0;\ 1]$.

Композицией дробно-линейных функций $g(x) = \dfrac{-2x+1}{3x+2}$ и $h(x) = \dfrac{3x-2}{-x+4}$ является функция

$$f(x) = h(g(x)) = \frac{3\dfrac{-2x+1}{3x+2} - 2}{-\dfrac{-2x+1}{3x+2} + 4} = \frac{-12x-1}{14x+7}, \quad x \neq -\frac{2}{3}.$$

Здесь $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \left\{-\dfrac{2}{3};\ -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Нетрудно убедиться в том, что композиция $g \circ h$ в общем случае не равна $h \circ g$. В то же время для любых функций f,

g, h имеем $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, что непосредственно вытекает из определения композиции.

В уравнениях, которые обычно решаются в школе, требуется найти числовое значение некоторой переменной. Вместе с тем в сборниках олимпиадных и конкурсных задач нередко встречаются «необычные» уравнения, где в качестве неизвестных выступают функции.

Например,

$$2f(1-x) + 1 = xf(x), \quad x \in \boldsymbol{R};$$

$$xf(x) + f\left(\frac{4}{2-x}\right) = x, \quad x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0;\ 2\}.$$

В этих уравнениях искомые функции связаны с известными при помощи операции композиции. Такие уравнения называют *функциональными*. Впрочем, «необычность» этих уравнений для школьника состоит скорее всего в постановке задачи: найти функцию, удовлетворяющую уравнению. Ведь функциональными уравнениями $f(x) = f(-x)$, $f(-x) = -f(x)$, $f(x + a) = f(x)$ задают такие известные свойства функций, как четность, нечетность, периодичность.

Многие функциональные уравнения не определяют конкретную функцию, а задают широкий класс функций. Так, уравнению

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

удовлетворяют функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \sin x + \cos x$ и многие другие, например, $y = g(\sin x)$, $y = g(\cos x)$, где g — произвольная функция.

В других случаях класс функций, удовлетворяющих функциональному уравнению, вполне обозрим. Например, функции вида $f(x) = a \sin x + b \cos x$ при произвольных $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$ и только они удовлетворяют функциональному уравнению $f(x + y) + f(x - y) = f(x) \cos y$ (см. задачу 4, § 3).

Обычно различают *частное* и *общее* решения функционального уравнения. Частное решение функционального уравнения есть функция или система функций, удовлетворяющая уравнению в заданной области определения. Общее решение составляет совокупность всех функций, удовлетворяющих уравнению[1].

Естественно, решение функционального уравнения зависит от того, в каком классе функций оно решается. Так, общее

[1] Иногда выделяют частные решения, когда функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению, содержит произвольные постоянные или не содержит их совсем, общие решения, если $f(x)$ содержит произвольные функции, и полные решения (в нашей терминологии — общие решения).

решение уравнения

$$f(2x) = 2f(x) \qquad (1)$$

в классе функций, определенных при всех действительных x и имеющих непрерывные производные, имеет вид $f(x) = kx$, $k \in \mathbf{R}$ (см. упражнение 5, § 6). Если же ослабить условия, накладываемые на искомые функции, то появятся и другие решения. Например, уравнению (1) удовлетворяет функция $f(x) = x \operatorname{tg}(\pi \log_2 x)$.

Функциональные уравнения начали изучать более 200 лет тому назад. Обоснование закона сложения сил привело к решению функционального уравнения

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\, f(y),$$

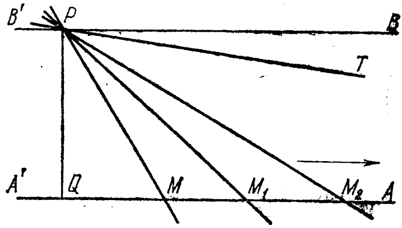

Рис. 1

которое принято называть *уравнением д'Аламбера* (см. § 7).

О. Коши (1789—1857) рассмотрел ряд уравнений, являющихся характеристическими свойствами линейной, показательной, логарифмической, степенной функций. Эти примеры свидетельствуют о важности функциональных уравнений для построения различных аксиоматических теорий. В связи с этим рассмотрим более подробно, как использовал Н. И. Лобачевский (1792—1856) функциональное уравнение для получения формулы угла параллельности в неевклидовой геометрии.

Как известно, в геометрии Лобачевского аксиома о том, что через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, лежащая с данной прямой в одной плоскости и не пересекающая ее, заменена аксиомой: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее.*

Рассмотрим прямую $A'A$, точку P вне прямой, перпендикуляр PQ к $(A'A)$, прямую $B'B$, проходящую через точку P и перпендикулярную $[PQ]$ (рис. 1).

Переменная точка M перемещается вдоль луча QA в направлении, указанном стрелкой. Прямая PM не может достичь положения (PB), поскольку $(B'B)$ не пересекает $(A'A)$, и, таким образом, имеется какое-то предельное положение (PT), к которому приближается (PM), когда M неограниченно удаляется по лучу QA. Смысл аксиомы параллельности Лобачевского заключается в том, что (PT) образует с (PQ) некоторый острый угол α $\left(Q\widehat{P}T = \alpha,\ \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Этот угол называется *углом параллельности*. Он является монотонно-убывающей функцией длины x отрезка $PQ: \alpha = \Pi(x)$. Формула

$$f(x) = \operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}$$

для угла параллельности была получена Лобачевским из функционального уравнения

$$(f(x))^2 = f(x+y)\, f(x-y)$$

(решение этого уравнения см. в § 6).

Ряд геометрических задач, приводящих к функциональным уравнениям, рассматривал английский математик Ч. Баббедж (1792—1871). Он изучал, например, периодические кривые второго порядка, определяемые следующим свойством для любой пары точек кривой: если абсцисса второй точки равна ординате первой, то ордината второй точки равна абсциссе первой. Пусть такая кривая является графиком функции $y = f(x)$; $(x, f(x))$ — произвольная ее точка. Тогда, согласно условию, точка с абсциссой $f(x)$ имеет ординату x. Следовательно,

$$f(f(x)) = x. \qquad (2)$$

Функциональному уравнению (2) удовлетворяют, в частности, функции: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0;\ |a|]$, $f(x) = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$.

В книге изложены некоторые элементарные методы решения функциональных уравнений. При этом приведены решения отдельных «классических» функциональных уравнений, имеющих широкое применение в математике. Рассматривается ряд применений функциональных уравнений.

Некоторые задачи, предлагаемые в книге, взяты из журналов «Математика в школе», «Квант» и др.

Наиболее трудные, по мнению авторов, разделы, задачи и упражнения отмечены звездочкой. При первом чтении их можно опустить.

Авторы стремились к тому, чтобы различные методы решения функциональных уравнений излагались независимо друг от друга. Это расширяет возможности использования книги различными группами читателей.

Приложение содержит доказательство нескольких фактов из математического анализа, используемых в книге. Эти утверждения детально в средней школе не изучаются.

§ 1. АДДИТИВНЫЕ ФУНКЦИИ

Одним из наиболее исследованных в математике является функциональное *уравнение Коши*

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ D(f)=\mathbf{R}. \tag{1}$$

Оно выражает так называемое *«свойство аддитивности»*. Значение аддитивной функции от суммы двух чисел равно сумме ее значений от каждого из этих чисел. Легко проверить, что линейная однородная функция $f(x)=ax$ удовлетворяет уравнению (1). В самом деле,

$$f(x+y)=a(x+y)=ax+ay=f(x)+f(y).$$

В то же время функции $\ln x$, x^2, $\sin x$ и др. свойством аддитивности не обладают.

Возникает вопрос, существует ли аддитивная функция, определенная при действительных значениях аргумента и отличная от однородной линейной. Другими словами, обладает ли функциональное уравнение (1) решениями, не совпадающими с функцией $f(x)=ax$?

Если функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1), то, заменяя последовательно y на x, $2x$, $3x$, получим:

$$f(2x)=f(x)+f(x)=2f(x),$$
$$f(3x)=f(x)+f(2x)=3f(x),$$
$$f(4x)=f(x)+f(3x)=4f(x).$$

Методом математической индукции убедимся, что равенство

$$f(nx)=nf(x) \tag{2}$$

выполняется для всех натуральных n.

Предполагая, что (2) верно для некоторого натурального числа n, докажем справедливость его для $n+1$:

$$f((n+1)x)=f(x+nx)=f(x)+f(nx)=$$
$$=f(x)+nf(x)=(n+1)f(x).$$

Итак, (2) выполняется для всех действительных x и натуральных n. Далее, положив в (2) $x=1$, получим $f(n)=$

$= nf(1)$. Заменяя в (2) x на $\frac{m}{n}$ $(m, n \in N)$, получим $f(m) = nf\left(\frac{m}{n}\right)$. Кроме того, $f(m) = mf(1)$. Отсюда

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1).$$

Итак, для положительных рациональных x

$$f(x) = xf(1). \tag{3}$$

Убедимся, что формула (3), дающая значение любой аддитивной функции f, применима для всех рациональных значений аргумента (а не только для положительных). Действительно, в силу (1), $f(x+0) = f(x) + f(0)$, т. е. $f(x) = f(x) + f(0)$, $f(0) = 0$, $f(0) = 0f(1)$. Применяя опять свойство аддитивности функции $f(x)$, получим

$$0 = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

$$f(-x) = -f(x). \tag{4}$$

Из равенств (4) и (3) при всяком положительном рациональном x получим $f(-x) = -f(x) = -xf(1)$, т. е. (3) доказано для всех $x \in Q$.

Одновременно доказано, что всякое решение уравнения (1) — нечетная функция, так как равенство (4) выполняется для всех действительных x.

Упражнения

1. Доказать, что формула (2) справедлива для всех рациональных n.
2. Доказать, что если $f(x)$ — аддитивная функция, то

$$f(x_1 + \cdots + x_n) = f(x_1) + \cdots + f(x_n), \quad x_i \in R, \quad i = \overline{1, n}, \; n \in N.$$

Приведенные выше рассуждения не свидетельствуют о том, что линейные однородные функции исчерпывают множество решений уравнения (1). Действительно, равенство (3) доказано только для рациональных значений x. И хотя каждое действительное число можно «приблизить» рациональным с любой степенью точности, тем не менее нельзя утверждать, что не существует других функций, определенных на множестве действительных чисел и удовлетворяющих уравнению (1). Аддитивную функцию, отличную от линейной однородной, построил в 1905 г. немецкий математик Г. Гамель.* Он ввел множество, называемое теперь *базисом Гамеля*. Это множество G действительных чисел обладает тем свойством, что каждое действительное число x представимо и притом единственным

*) G. Hamel, Math. Ann. 60 (1905), 459–462.

образом в виде

$$x = n_1 g_1 + n_2 g_2 + \cdots + n_k g_k,$$

где $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{Z}$, $g_1, g_2, \ldots, g_k \in G$.

Произвольно задав значения функции $f(x)$ в точках множества G, можно однозначно продолжить ее на всю числовую прямую при помощи равенств (1), (2), (4):

$$f(x) = f(n_1 g_1 + n_2 g_2 + \cdots + n_k g_k) =$$

$$= n_1 f(g_1) + n_2 f(g_2) + \cdots + n_k f(g_k).$$

Такими функциями исчерпываются все решения уравнения (1). К сожалению, построение базиса Гамеля требует знаний, далеко выходящих за рамки школьной программы. Тем не менее во многих важнейших классах функций функциональное уравнение Коши решается полностью методами, доступными для учащегося средней школы.

1. Класс непрерывных функций. Напомним, что функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x_0 \in D(f)$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция f непрерывна в каждой точке промежутка, входящего в область определения функции, то она называется *непрерывной на этом промежутке*.

Например, функции $\sin x$, e^x — непрерывные на всей числовой прямой, $\ln x$ — на промежутке $]0; \infty[$, функция $\frac{1}{x}$ непрерывна на промежутках $]-\infty; 0[$ и $]0; \infty[$.

Найдем непрерывные функции, определенные для всех действительных x и удовлетворяющие уравнению (1). Уже доказано, что $f(x) = xf(1)$ при всех рациональных x для искомой функции f.

Пусть теперь x — любое иррациональное число. Известно, что существует последовательность рациональных чисел r_1, r_2, ..., r_n, ..., сходящихся к x, т. е. $x = \lim\limits_{n \to \infty} r_n$ (например, последовательность десятичных приближений по недостатку). Как уже доказано, $f(r_n) = r_n f(1)$, $n \in N$. Перейдем теперь к пределу при $n \to \infty$. Справа получаем $xf(1)$. Слева же, ввиду непрерывности функции f, получим (см. теорему 2 приложения)

$$\lim_{n \to \infty} f(r_n) = f(x).$$

Окончательно, $f(x) = ax$, где $a = f(1)$.

Непосредственной подстановкой было проверено, что эта функция удовлетворяет уравнению (1).

Предполагалось, что функция $f(x)$, удовлетворяющая условию аддитивности, непрерывна на всей числовой прямой. Оказывается, достаточно было предположить, что она непрерывна хотя бы в одной точке. Докажем, что если функция аддитивна и непрерывна при $x = x_0$, то она непрерывна при всех x. Действительно, для произвольного $x' \in \boldsymbol{R}$

$$\lim_{x \to x'} f(x) = \lim_{x - x' + x_0 \to x_0} f((x - x' + x_0) + (x' - x_0)).$$

Заметим, что если $x \to x'$, то $x - x' \to 0$, $x - x' + x_0 \to x_0$. Обозначив $x - x' + x_0 = t$, в силу аддитивности получим

$$\lim_{t \to x_0} f(t + (x' - x_0)) = \lim_{t \to x_0} (f(t) + f(x' - x_0)).$$

Применяя теоремы о пределах функций и учитывая непрерывность $f(x)$ в точке x_0, т. е. равенство $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$, получим

$$\lim_{t \to x_0} f(t) + f(x' - x_0) = f(x_0) + f(x' - x_0) =$$
$$= f(x_0 + (x' - x_0)) = f(x').$$

Итак, $\lim\limits_{x \to x'} f(x) = f(x')$, т. е. функция $f(x)$ непрерывна при любом $x' \in \boldsymbol{R}$.

2. Класс монотонных функций. Из школьного курса математики известно, что функция f называется *возрастающей* (*неубывающей*) на множестве E, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству E, из $x_1 < x_2$ вытекает $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$). Функция f называется *убывающей* (*невозрастающей*) на множестве E, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству E, из $x_1 < x_2$ вытекает $f(x_1) > f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$). Неубывающие и невозрастающие функции называются *монотонными*. Например, функции $x \to ax$ (при $a > 0$), $x \to x^n$ (при натуральных нечетных n), $x \to a^x$ (при $a > 1$) возрастают на всей числовой прямой. Функции $x \to \log_a x$ (при $0 < a < 1$), $x \to -x^2$ убывают на положительной полупрямой $]0; \infty[$.

Найдем решение функционального уравнения (1) в классе монотонных функций. Пусть $f(x)$ не убывает при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Доказано, что $f(x) = xf(1)$ для всех рациональных x. Если x — иррациональное число, то для любого натурального q найдется целое число p такое, что

$$\frac{p}{q} < x < \frac{p+1}{q}. \qquad (5)$$

Например, для действительного числа $x = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$

$$a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n < x < a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n + 10^{-n}.$$

Так как $f(x)$ — неубывающая функция, то из (5) имеем

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{p+1}{q}\right),$$

или

$$a \cdot \frac{p}{q} \leqslant f(x) \leqslant a \cdot \frac{p+1}{q}, \quad \text{где } a = f(1).$$

Поскольку $f(0) = 0$, то $f(1) \geqslant 0$ (использовано условие монотонности f). Если $a > 0$, то $\frac{p}{q} \leqslant \frac{f(x)}{a} \leqslant \frac{p+1}{q}$. Отсюда, сравнивая с (5), имеем $\frac{f(x)}{a} = x$, $f(x) = ax$. Если же $a = 0$, то из неравенств $0 \cdot \frac{p}{q} \leqslant f(x) \leqslant 0 \cdot \frac{p+1}{q}$ следует, что $f(x) \equiv 0$. Итак, если $f(x)$ — неубывающая функция, то $f(x) = ax$.

Аналогично решается уравнение (1) при условии, что $f(x)$ — невозрастающая функция.

Упражнения

3. Привести решение уравнения (1) при условии, что $f(x)$ — невозрастающая функция.

4. Найти решение (1) в предположении, что $f(x) > 0$ при $x > 0$.

3. Класс ограниченных функций. Функция f на множестве E называется:

а) *ограниченной сверху* (рис. 2), если существует такое число M, что при всех значениях аргумента $x \in E$ имеет место неравенство

$$f(x) \leqslant M;$$

б) *ограниченной снизу* (рис. 3), если существует число m такое, что при всех значениях $x \in E$ имеет место неравенство

$$f(x) \geqslant m;$$

в) *ограниченной* (рис. 4), если она ограничена сверху и снизу.

Так, функции $x \to \sin x$, $x \to \cos x$ ограничены на всем множестве $\boldsymbol{R}: |\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$; функция $x \to 2^x$ на множестве $]-\infty;\ \infty[$ ограничена снизу числом 0, так как $2^x > 0$. На полупрямой $]-\infty;\ 0]$ функция $x \to 2^x$ ограничена, так как $0 < 2^x \leqslant 1$, если $x \leqslant 0$. Функция $x \to \frac{1}{x}$ не ограничена в области ее определения.

Покажем, что если аддитивная функция $f(x)$ ограничена сверху хотя бы на одном интервале $]a;\ b[$, то она — линейная однородная функция.

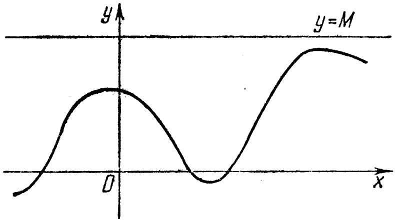

Рис. 2

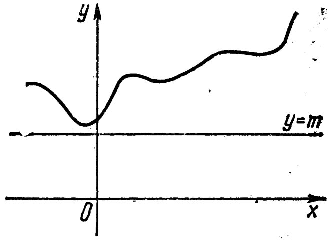

Рис. 3

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x) - xf(1). \qquad (6)$$

Как следует из равенства (3), она обращается в нуль для всех рациональных x. Кроме того, $g(x)$ — аддитивна. Действительно,

$$g(x+y) = f(x+y) - (x+y)f(1) = f(x) + f(y) - xf(1) - yf(1) = g(x) + g(y).$$

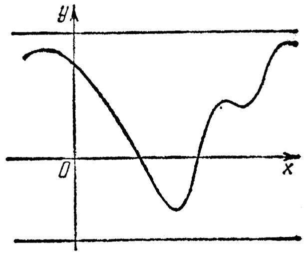

Рис. 4

Поэтому

$$g(x+r) = g(x) + g(r) = g(x)$$

для всех рациональных r. Функция $g(x)$ ограничена сверху на промежутке $]a;\ b[$. В самом деле, так как $f(x) < M$ для всех $x \in\ ]a;\ b[$, то

$$g(x) < M', \qquad (7)$$

где $M' = M + |f(1)| \max\{|a|;\ \ |b|\}$.

Рис. 5

Убедимся, что функция $g(x)$ на всей числовой прямой может принимать только те значения, которые она принимает на $]a;\ b[$.

Пусть x — любое действительное число. Обозначив через r десятичное приближение с недостатком числа $b - x$, превосходящее $a - x$ (рис. 5), получим

$$a - x < r < b - x, \text{ откуда } a < r + x < b.$$

Но $g(x+r) = g(x)$ для $r \in Q$. Тем самым показано, что $g(x)$ ограничена сверху на множестве $]-\infty;\ \infty[$. Отсюда следует, что функция $g(x)$ тождественно равна нулю. В самом деле, пусть существует действительное число x_0 такое, что $g(x_0) = A$, $A \neq 0$. Тогда, так как $g(x)$ — аддитивная функция, то из (2) (см. также упражнение 1) имеем

$$g(nx_0) = ng(x_0) = nA, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Подобрав n так, чтобы $nA > M'$, получим $g(nx_0) > M'$, что противоречит ограниченности $g(x)$. Итак, $g(x) = 0$ при всех значениях x. Поэтому из равенства (6) получим $f(x) = ax$, где $a = f(1)$.

Упражнения

5. Доказать неравенство (7).

6. Пусть $f(x)$ — аддитивная функция, x — иррациональное число, $x = a_0, a_1 \ldots a_n + \dfrac{\varepsilon_n}{10^n}$, где ε_n — иррациональное число, $\varepsilon_n \in]0;\ 1[$. Доказать, что $f(x) = xf(1) + \dfrac{1}{10^n}(f(\varepsilon_n) - \varepsilon_n f(1))$.

7. Воспользовавшись упражнением 6, доказать, что если аддитивная функция $f(x)$ ограничена на $]0;\ 1[$, то $f(x) = ax$.

4. Класс дифференцируемых функций. Как известно, функция, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой в этом промежутке*.

Функция $x \to \sin x$ дифференцируема на всей числовой прямой, $x \to \sqrt{x}$ дифференцируема на промежутке $]0;\ \infty[$, $x \to |x|$ дифференцируема при всех $x \neq 0$ и т. д.

Легко проверить, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке. Как показывает пример функции $f(x) = |x|$, обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Поэтому класс дифференцируемых функций у́же класса непрерывных функций. Следовательно, решением уравнения Коши

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

в классе дифференцируемых функций является линейная однородная функция. Тем не менее, метод решения уравнения Коши в предположении дифференцируемости $f(x)$ представляет интерес ввиду его простоты. При фиксированном $y \in \mathbf{R}$ $f(x + y)$ и $f(x) + f(y)$ являются функциями переменной $x \in \mathbf{R}$. Ввиду их равенства, равны и их производные (по переменной x!). Продифференцировав обе части равенства (1), получим

$$f'(x + y) = f'(x) \tag{8}$$

$((f(y))' = 0$, как производная постоянной). Равенство (8) выполняется для любых $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, так как y можно было выбрать произвольно. Положив в (8) $x = 0$, придем к тождеству

$$f'(y) = f'(0) = c$$

для всех $y \in \boldsymbol{R}$. Итак, $f'(x)$ — постоянная функция. Поэтому ее первообразная

$$f(x) = cx + b, \tag{9}$$

где b — некоторое действительное число. Проверка показывает, что (9) удовлетворяет (1) только при $b = 0$, $c \in \boldsymbol{R}$.

Упражнения

8*. Пусть аддитивная функция $f(x)$ имеет первообразную на любом интервале числовой прямой. Доказать, что

$$yf(x) = \int_0^{x+y} f(u)\,du - \int_0^x f(u)\,du - \int_0^y f(u)\,du. \tag{10}$$

9. Воспользовавшись соотношением (10), доказать, что если аддитивная функция $f(x)$ имеет первообразную на любом интервале числовой прямой, то $f(x) = ax$.

5*. Одно обобщение уравнения Коши. Пусть n — фиксированное натуральное число. Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n, \tag{11}$$

где $D(f) = \boldsymbol{R}$. При $n = 1$ оно обращается в уравнение Коши. Как было показано, в классе непрерывных функций единственным решением уравнения Коши является линейная однородная функция. Из результатов Гамеля (см. с. 8) следует, что и разрывные функции могут удовлетворять уравнению Коши. Покажем, что решение уравнения (11) при $n > 1$ является непрерывной функцией.

Полагая $x = y = 0$, получим $f(0) = 0$. Поэтому при $x = 0$ из (11) имеем $f(y^n) = (f(y))^n$ для всех $y \in \boldsymbol{R}$. Каждое неотрицательное число z может быть записано в виде $z = y^n$. Отсюда

$$f(x + z) = f(x + y^n) = f(x) + (f(y))^n =$$
$$= f(x) + f(y^n) = f(x) + f(z), \quad z \geqslant 0, \ x \in \boldsymbol{R}.$$

В частности, при $x = -z$

$$f(x) + f(z) = f(-z) + f(z) = f(-z + z) = f(0) = 0,$$

т. е. $f(-z) = -f(z)$, $z \in \boldsymbol{R}$. Если $z \geqslant 0$, то

$$f(x - z) = -f(-x + z) = -(f(-x) + f(z)) =$$
$$= -f(-x) - f(z) = f(x) - f(z).$$

Отсюда следует, что $f(x+w) = f(x) + f(w)$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, $w \in \boldsymbol{R}$, т. е. $f(x)$ — аддитивная функция. Для аддитивной функции при рациональных t имеет место соотношение $f(tw) = tf(w)$ (см. упражнение 1). Легко видеть, что

$$f((t+x)^n) = (f(t+x))^n = (f(t)+f(x))^n. \qquad (12)$$

Воспользовавшись формулой Ньютона[1]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $0! = 1$, и аддитивностью $f(x)$, преобразуем отдельно левую и правую части (12) при рациональных t:

$$f((t+x)^n) = f\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{n-k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} f(C_n^k t^{n-k} x^k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{n-k} f(x^k);$$

$$(f(t)+f(x))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f(t))^{n-k} (f(x))^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (tf(1))^{n-k} (f(x))^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^{n-k} (f(1))^{n-k} (f(x))^k.$$

Правые части последних двух равенств представляют собой многочлены от t. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим

$$f(x^k) = (f(1))^{n-k} (f(x))^k, \quad k \in \boldsymbol{Z}_0, \ n > 1.$$

В частности, для $k = 2$ имеем

$$f(x^2) = (f(1))^{n-2} (f(x))^2. \qquad (13)$$

Если $(f(1))^{n-2} > 0$, то $f(x)$ — неубывающая функция. Действительно, всякое $y > 0$ представимо в виде $y = x^2$, поэтому из (13) имеем $f(y) = f(x^2) \geqslant 0$. При $x_1 > x_2$, $x_1 - x_2 > 0$, $f(x_1 - x_2) \geqslant 0$, или, в силу аддитивности $f(x)$, $f(x_1) - f(x_2) \geqslant$

---

[1] Здесь применена сокращенная запись операции суммирования: $\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$, В нашем случае

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n.$$

$\geqslant 0$. Если же $(f(1))^{n-2} < 0$, аналогично доказывается, что функция $f(x)$ — невозрастающая.

Ранее было доказано, что если аддитивная функция монотонна, то она имеет вид $f(x) = ax$.

Полагая в (13) $x = 1$, получим, что $f(1)$ равно 0 или 1 при четном n и $f(1)$ равно 0, 1 или —1 при нечетном $n > 1$.

Итак, $f(x) = x$ либо $f(x) = 0$ при четных n; $f(x) = x$, либо $f(x) = -x$, либо $f(x) = 0$ при нечетных $n > 1$.

Тем самым доказана не только непрерывность решения уравнения (11) при $n > 1$, но и получен его вид.

§ 2. УРАВНЕНИЯ КОШИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Наряду с уравнением аддитивности, Коши рассматривал решения трех уравнений:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y),$$

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y),$$

которые также иногда называют *уравнениями Коши*. Как увидим в дальнейшем, их решениями являются известные элементарные функции (показательная, логарифмическая, степенная). Рассмотрим, последовательно, каждое из этих уравнений.

Найдем решение уравнения

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (1)$$

в классе монотонных функций, определенных на действительной числовой прямой.

Покажем вначале, что если функция, удовлетворяющая уравнению (1), хотя бы в одной точке x_0 обращается в 0, то она тождественно равна 0. В самом деле, $f(x) = f((x - x_0) + x_0) = f(x - x_0) f(x_0) = 0$. Отметим, что $f(x) \equiv 0$ является решением уравнения (1).

Пусть теперь $f(x) \not\equiv 0$. Заменив в (1) $x \to \frac{x}{2}$, $y \to \frac{x}{2}$, получим

$$f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 > 0.$$

Таким образом, решение уравнения (1), отличное от нулевого, является функцией, принимающей строго положительные значения при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Прологарифмируем уравнение (1) в предположении, что оно имеет решение. Получим

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y). \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ неубывающая, то функция $g(x) = \ln f(x)$ также неубывающая. Действительно, если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $\ln f(x_1) \geqslant \ln f(x_2)$. Аналогично, если $f(x)$ — невозрастающая, то и $g(x)$ — невозрастающая.

Уравнение (2) перепишем в виде

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Решением последнего уравнения в классе монотонных функций является $g(x) = cx$. Следовательно, $\ln f(x) = cx$, $f(x) = e^{cx}$.

Проверка показывает, что при любом c функция $f(x) = e^{cx}$ является решением (1).

Уравнение (1) аналогично может быть решено в классе функций, непрерывных при всех $x \in \boldsymbol{R}$. Результат получается тот же. Однако пришлось бы воспользоваться сведениями, выходящими за рамки школьной программы, а именно, понадобилась бы теорема о том, что композиция двух непрерывных функций — непрерывная функция.

Решение уравнения (1), по существу, сведено к уравнению аддитивности. Аналогично решается уравнение

$$f(xy) = f(x) + f(y). \qquad (3)$$

Это уравнение будем рассматривать в классе монотонных функций, определенных при положительных значениях аргумента. Положим $x = e^t$, $g(t) = f(e^t)$, откуда $t = \ln x$, $f(x) = g(\ln x)$. Так как функция e^t — возрастающая, а функция $f(x)$ — монотонная, то $g(t) = f(e^t)$ — также монотонная. Доказательство этого факта предлагаем провести самостоятельно.

Функция $g(t)$ удовлетворяет уравнению аддитивности. В самом деле,

$$g(t+u) = f(e^{t+u}) = f(e^t \cdot e^u) = f(e^t) + f(e^u) = g(t) + g(u).$$

Решением уравнения (3) в классе монотонных функций является функция $g(t) = ct$. Отсюда $f(x) = c \ln x$.

Решение уравнения (3) найдено в предположении, что $f(x)$ — монотонна и определена при $x > 0$.

Если существует функция, определенная при $x = 0$ и удовлетворяющая (3), то при $y = 0$

$$f(0) = f(x) + f(0),$$

т. е. $f(x) \equiv 0$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Предположим, что уравнение (3) имеет решение среди функций, определенных при всех $x \neq 0$. Тогда, полагая вначале $x = y = t$, а затем $x = y = -t$, получим:

$$f(t^2) = 2f(t),$$

$$f(t^2) = 2f(-t),$$

откуда

$$f(-t) = f(t),$$

т. е. только четные функции, определенные при $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, могут удовлетворять уравнению (3). Если $f(x)$ — монотонна при $x > 0$, то, как видели выше, $f(x) = c \ln x$ для положительных x. Если $x < 0$, то $f(x) = f(-x) = c \ln(-x)$. Итак, $f(x) = c \ln |x|$, $x \neq 0$.

Упражнения

1. Доказать, что если функция, удовлетворяющая уравнению

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \tag{4}$$

определена при $x = 0$, то $f(x) \equiv 1$, или $f(0) = 0$.

2. Найти все монотонные функции $f(x)$, определенные при $x > 0$ и удовлетворяющие функциональному уравнению (4).

3. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет (4) и определена при всех $x \neq 0$, то она является четной или нечетной.

4. Используя результаты упражнений 2 и 3, найти все решения уравнения (4) среди функций, монотонных при $x > 0$ и определенных при всех x.

5*. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D(f)$, а $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, $y_0 \in D(f)$, то $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

6. Решить уравнения (3) и (4) в классе непрерывных функций, определенных при $x > 0$.

Функциональные уравнения Коши с успехом применяются при решении некоторых математических задач.

Задача 1*. Говорят, что последовательность (x_n) *сходится по Чезаро* к числу α, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \alpha,$$

и обозначают $x_n \xrightarrow[c]{} \alpha$. Функцию $f(x)$ называют непрерывной по Чезаро в точке $x = \alpha$, если из соотношения $x_n \xrightarrow[c]{} \alpha$ следует $f(x_n) \xrightarrow[c]{} f(\alpha)$. Найти все функции, непрерывные по Чезаро хотя бы при одном значении $x = \alpha$.

Пусть $f(x)$ — искомая функция. Обозначим: $B = f(\alpha)$, $g(x) = f(x + \alpha) - B$. Покажем, что если $f(x)$ непрерывна в смысле Чезаро при $x = \alpha$, то $g(x)$ непрерывна по Чезаро при $x = 0$. В самом деле, пусть $x_n \xrightarrow[c]{} 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_1+\alpha) + \dots + (x_n+\alpha)}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \alpha\right) =$$
$$= 0 + \alpha = \alpha,$$

т. е. $x_n + \alpha \xrightarrow[c]{} \alpha$. В силу непрерывности $f(x)$ по Чезаро в точке $x = \alpha$, $f(x_n + \alpha) \xrightarrow[c]{} f(\alpha) = B$. Поэтому $g(x_n) \xrightarrow[c]{} g(0) =$

$= 0$. Задача свелась к нахождению функций $g(x)$, непрерывных в нуле по Чезаро и таких, что $g(0) = 0$.

Рассмотрим последовательность $(a, b, c, a, b, c, \ldots)$ и выясним, при каких условиях она сходится к нулю в смысле Чезаро. Среднее арифметическое первых n членов этой последовательности имеет одно из следующих трех значений:

$$\frac{1}{3}(a+b+c); \quad \frac{a+b+c}{3} + \frac{2a-b-c}{3n}; \quad \frac{a+b+c}{3} + \frac{a+b-2c}{3n}.$$

Легко видеть отсюда, что $(a, b, c, a, b, c, \ldots) \underset{c}{\rightarrow} 0$ тогда и только тогда, когда $a + b + c = 0$.

Пусть действительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a + b + c = 0$. Тогда из непрерывности по Чезаро $g(x)$ в точке нуль вытекает $(g(a), g(b), g(c), g(a), g(b), g(c), \ldots) \underset{c}{\rightarrow} 0$, т. е. $g(a) + g(b) + g(c) = 0$, или $g(a) + g(b) = -g(-a-b)$. Отсюда при $b = 0$ получим $g(a) = -g(-a)$. Заметим, что a и b можно считать произвольными действительными числами, а $c = -a-b$. Таким образом, при любых x и y

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Получено уравнение Коши. Его решение сможем записать, если покажем, что функция $g(x)$ принадлежит к одному из рассмотренных классов функций. Убедимся, что она непрерывна (в обычном смысле!) в точке нуль.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Поскольку последовательность (x_n) сходящаяся, то она ограничена (необходимое условие сходимости последовательности), т. е. существует такое число M, что $|x_n| < M$ для всех $n \in N$. Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда из определения предела последовательности вытекает существование натурального n_0 такого, что $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > n_0$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, то найдется $n_1 \in N$, $n_1 > n_0$,

такое, что $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2n_0M}$ для всех $n > n_1$. Тогда

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|) =$$

$$= \frac{1}{n}(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{n_0}|) + \frac{1}{n}(|x_{n_0+1}| + \cdots$$

$$\cdots + |x_n|) \leqslant \frac{1}{n} \cdot n_0 M + \frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot (n - n_0) <$$

$$< \frac{\varepsilon n_0 M}{2 n_0 M} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - n_0}{n} < \varepsilon$$

для $n > n_1$. Еще раз применяя определение предела, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 0,$$

т. е. $x_n \xrightarrow[c]{} 0$.

В силу непрерывности $g(x)$ в точке нуль по Чезаро получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n)}{n} = 0.$$

Функция $g(x)$ аддитивна, поэтому $g(rx) = rg(x)$, $r \in Q$ (см. упражнение 1, § 1). Тогда

$$\frac{g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n)}{n} = g\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Итак, из соотношения $x_n \to 0$ следует

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) = 0.$$

Построим последовательность $y_n = nx_n - (n-1)x_{n-1}$. При этом

$$x_n = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Так как $x_n \to 0$, то $\dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \to 0$ и, ввиду непрерывности $g(x)$ по Чезаро, $g\left(\dfrac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}\right) \to 0$, т. е. $g(x_n) \to 0$. Следовательно, $g(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ в обычном смысле (см. приложение, теорема 1). А так как она удовлетворяет уравнению Коши, то

$$g(x) = Ax.$$

Для исходной функции $f(x)$ имеем

$$f(x + \alpha) = g(x) + B = Ax + B,\ f(x) = A(x - \alpha) + B = $$
$$= Ax + C,$$

где $C = B - A\alpha$.

Рекомендуем самостоятельно убедиться в том, что функция $Ax + C$ (A, C — произвольные действительные числа) непрерывна по Чезаро при любом значении x.

Таким образом, линейные функции и только они непрерывны по Чезаро при любом действительном x.

Задача 2*. Найти все непрерывные функции $f(x)$, определенные на промежутке $]0; \infty[$, для которых разность $f(x_1y) - f(x_2y)$ при произвольных допустимых значениях x_1 и x_2 не зависит от y.

По условию, выражение $f(xy) - f(y)$ $(x_1 = x,\ \ x_2 = 1)$ не зависит от y. Поэтому

$$f(xy) - f(y) = f(x) - f(1).$$

Положив $g(x) = f(x) - f(1)$, получим функциональное уравнение Коши

$$g(xy) = g(x) + g(y).$$

Известно, что в классе непрерывных функций $g(x) = c\ln x$ (см. упражнение 6). Отсюда $f(x) = c\ln x + b$, где $b = f(1)$. Проверка показывает, что условию задачи удовлетворяют функции $f(x) = c\ln x + b$ при произвольных b и c.

Рассмотрим задачу 2, считая x_1 и x_2 различными фиксированными числами. Так как $f(x_1y) - f(x_2y)$ не зависит от y, то $f(x_1y) - f(x_2y) = c$. Пусть $x_2y = x$, тогда $f(ax) = f(x) + c$, где $a = \frac{x_1}{x_2} \neq 1$, $a > 0$, c — постоянная. Заменив x на e^x, получим

$$f(e^{x+\ln a}) - c = f(e^x),\ \ x \in \boldsymbol{R}.$$

Вычитая из обеих частей $\frac{cx}{\ln a}$, получим

$$f(e^{x+\ln a}) - \frac{c(x+\ln a)}{\ln a} = f(e^x) - \frac{cx}{\ln a},$$

или

$$g(x + \ln a) = g(x), \tag{5}$$

где $g(x) = f(e^x) - \frac{cx}{\ln a}$. Уравнению (5) удовлетворяют периодические с периодом $\ln a$[1] функции. Отсюда $f(x) = g(\ln x) + \frac{c\ln x}{\ln a}$.

При проверке убеждаемся, что функции вида $f(x) = g(\ln x) + \alpha\ln x$, где α — произвольная константа, а $g(x)$ — непрерывная периодическая с периодом $\ln\frac{x_1}{x_2}$ функция, обладают требуемым свойством.

Решение многих функциональных уравнений сводится к уравнениям Коши.

[1] $\ln a$ не обязательно наименьший положительный период.

Задача 3. Известно, что сложение действительных чисел обладает сочетательным свойством:

$$(x+y)+z=x+(y+z)$$

для любых $x,\ y,\ z \in \boldsymbol{R}$. Требуется найти все непрерывные функции $f(x)$, «сохраняющие» сочетательность, т. е.

$$f(x+y)+f(z)=f(x)+f(y+z). \tag{6}$$

Перепишем (6) в виде

$$f(x+y)-f(x)=f(y+z)-f(z).$$

Легко видеть, что левая часть не зависит от x, т. е.

$$f(x+y)-f(x)=g(y).$$

При $x=0$ имеем $f(y)=g(y)+a$, $a=f(0)$. Пришли к функциональному уравнению Коши

$$g(x+y)=g(x)+g(y).$$

Его непрерывным решением являются функции $g(x)=cx$. Таким образом, $f(x)=cx+a$, где a и c — произвольные константы.

Задача 4. Найти плоские кривые, обладающие следующим свойством: для произвольных двух точек сумма произведений абсциссы одной точки на ординату другой равна ординате точки, абсцисса которой равна произведению абсцисс данных точек.

Ограничимся отысканием кривых, являющихся графиками непрерывных функций, определенных при положительных значениях аргумента.

Задача сводится к решению функционального уравнения

$$f(xy)=xf(y)+yf(x).$$

Пусть $g(x)=\frac{f(x)}{x}\cdot$ Тогда получим одно из уравнений Коши вида $g(xy)=g(x)+g(y)$. Так как $g(x)$ непрерывна при $x>0$, то $g(x)=c\ln x$. Отсюда $f(x)=cx\ln x$ с произвольной константой c.

Упражнения

7. Найти непрерывные функции $f(x)$, определенные при $x>0$, удовлетворяющие уравнению

$$f(xy)=x^{\beta}f(y)+y^{\beta}f(x),\ \ \beta\in\boldsymbol{R}.$$

8. Решить в классе положительных непрерывных функций уравнение

$$(f(y))^2=f(y+x)\,f(y-x),\quad D(f)=\boldsymbol{R}.$$

Задача 5. Найти непрерывные функции $f(x)$, определенные при $x > 0$ и удовлетворяющие уравнению

$$f(f(x)) = xf(x). \tag{7}$$

Легко проверить, что никакая константа, отличная от 0, не является решением уравнения (7). Кроме того, из (7) вытекает, что $f(x) > 0$ при всех допустимых значениях x. Рассмотрим функции $f(x)$, не являющиеся константами. Пусть $y = f(x)$. Уравнение (7) перепишем в виде $f(y) = xy$, отсюда $f(f(y)) = f(xy)$. Так как $f(f(y)) = yf(y) = f(x)f(y)$, то

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Получили функциональное уравнение Коши (4). Его непрерывные решения, отличные от 0, имеют вид $f(x) = x^a$ (см. упражнение 6).

Заметим, что $f(x) = x^a$ является решением уравнения Коши, если x и y независимо друг от друга принимают любые положительные значения. В нашем случае y и x связаны соотношением $y = f(x)$. Поэтому проверкой найдем те значения a, при которых $f(x) = x^a$ может удовлетворять (7).

Имеем $x^{a^2} = x^{a+1}$, откуда $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Обратно, функции $x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ и $x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ удовлетворяют (7). Таким образом, функции $f(x) \equiv 0$, $f(x) = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, $f(x) = x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$ являются решениями задачи 5.

§ 3. МЕТОД ПОДСТАНОВОК

В предыдущих параграфах были найдены решения функциональных уравнений в предположении, что искомая функция удовлетворяет условиям непрерывности, либо монотонности, либо обладает некоторыми другими свойствами. Перейдем к рассмотрению метода, который, с одной стороны, позволяет решить функциональное уравнение без столь существенных ограничений, а с другой, является достаточно элементарным.

Задача 1. Найти функцию $f(x)$, определенную при всех действительных $x \neq a$, $x \neq 0$ и удовлетворяющую уравнению

$$(a - x)f(x) - 2xf(a - x) = 1. \tag{1}$$

Если такая функция существует, то вместо x можем подставлять в уравнение (1) любое выражение, не выводящее за пределы области определения функции. Заменяя x на $a - x$, получим уравнение

$$xf(a - x) - 2(a - x)f(x) = 1, \tag{2}$$

которое содержит те же самые функции $f(x)$ и $f(a-x)$. Решая (1) и (2) как систему относительно неизвестных $f(x)$ и $f(a-x)$, получим

$$f(x)=\frac{1}{x-a},\quad x\neq 0.$$

Проверкой убеждаемся, что эта функция удовлетворяет условию задачи: $(a-x)\frac{1}{x-a}-2x\frac{1}{a-x-a}=1$.

Сущность метода, использованного при решении задачи 1, заключается в следующем. Предполагаем, что уравнение имеет решение. Применяем к переменным, входящим в функциональное уравнение, некоторые подстановки. Получаем систему уравнений, одним из неизвестных которой является искомая функция. После решения системы непосредственной проверкой необходимо убедиться, что найденная функция удовлетворяет условиям задачи.

Основная трудность при использовании этого метода состоит в подборе удачных подстановок.

В первую очередь изложим приемы решения некоторых функциональных уравнений, в которых одно из двух переменных x или y встречается и самостоятельно, т. е. вне функции f.

Задача 2. Найти функцию, определенную при всех действительных x и удовлетворяющую уравнению

$$f(xy)=y^kf(x). \tag{3}$$

Полагая $x=1$, получим $f(y)=y^k f(1)$. Обозначим $f(1)=c$. Тогда $f(y)=cy^k$. Эта функция удовлетворяет уравнению (3) при любом значении c. В самом деле, $f(xy)=c\,(xy)^k=y^kcx^k=y^kf(x)$.

Рассмотренное уравнение характеризуется тем, что y в правой части стоит не под знаком функции f. В то же время в левой части x и y вместе содержатся под знаком искомой функции. Подстановка $x=1$ позволила получить выражение для $f(y)$.

Аналогично решается функциональное уравнение

$$f(x+y)+f(y-x)-(y+2)f(x)+y(x^2-2y)=0,$$
$$D(f)=\boldsymbol{R}. \tag{4}$$

В результате подстановки $x=0$ получаем

$$f(y)=y^2+\frac{a}{2}y+a, \tag{5}$$

где $a=f(0)$. Проверка показывает, что выражение (5) дает решение функционального уравнения только при $a=0$.

Окончательно получим $f(x) = x^2$ (несущественно, как обозначить переменное).

Хочется подчеркнуть, что *проверка является составной частью решения функционального уравнения.* Ведь все преобразования проведены в предположении, что существует функция, удовлетворяющая данному уравнению. И то обстоятельство, что в процессе решения получено некоторое выражение для $f(x)$, свидетельствует только о том, что если существует решение уравнения, то оно обязательно имеет найденный вид.

Так, решая уравнение

$$f(xy) = \sin y \cdot f(x), \quad D(f) = \mathbf{R},$$

подстановкой $x = 1$, получим $f(y) = a \sin y$, где $a = f(1)$.

В результате проверки убеждаемся, что только при $a = 0$ получаем функцию, удовлетворяющую уравнению: $f(x) \equiv 0$.

Попытка решить уравнение $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$ подстановкой $y = 0$ (или $x = 0$) не дает положительного результата. Однако, если произведем замену $x + y = z$, $x - y = t$, то получим уравнение

$$f(z) - f(t) = z^2 - t^2,$$

которое сразу решается подстановкой $t = 0$.

Упражнение

1. Решить функциональные уравнения ($D(f) = \mathbf{R}$):

а) $f(x+y) = f(x) + y$; б) $f(x+y) = f(x)\, e^y$;
в) $f(x+y) = (f(x))^y$; г) $f(xy) = (f(x))^y$;
д) $f(x+y) + 2f(x-y) + f(x) + 2f(y) = 4x + y$;
е) $f(x+y) + f(x-y) = 2x^2 + 2y^2$.

Задача 3. Решить функциональное уравнение[1]

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)(1+y) = 2xy(3y - x^2). \qquad (6)$$

Метод, предложенный в предыдущей задаче, не дает решения функционального уравнения. Если положим $x = 0$, то наряду с $f(y)$ выделится $f(-y)$. При $y = 0$ тоже не получаем желаемого результата.

Произведем последовательно подстановки $x = 0$, $y = t$; $x = t - 1$, $y = 1$, $x = -1$, $y = t - 1$. Получим систему уравнений

$$f(t) + f(-t) - 2a(1+t) = 0,$$

[1] Если не указана область определения искомой функции $f(x)$, то предполагается, что $D(f) = \mathbf{R}$.

$$f(t-2)+f(t)=-2(t-1)(2t-t^2-4)$$
$$f(t-2)+f(-t)-2bt=-2(t-1)(3t-4),$$

где $a=f(0)$, $b=f(-1)$.

Исключая $f(-t)$, $f(t-2)$ (для этого достаточно из суммы первых двух уравнений вычесть третье), получим

$$2f(t)=2t^3+2t(a-b-1)+2a.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что только при $a=0$, $b=-1$ функция $f(t)=t^3+t(a-b-1)+a$ удовлетворяет уравнению (6). Итак, $f(x)=x^3$ является единственным решением уравнения (6).

При решении задачи 3 существенным фактором было то, что при $y=-1$ слагаемое $2f(x)(1+y)$ обращается в 0. Этот метод применим к уравнениям, для которых существует такое значение $y=y_0$, что член, содержащий $f(x)$, становится равным 0. Если данное условие выполнено, подстановки $x=0$, $y=t$; $x=y_0+t$, $y=y_0$; $x=y_0$, $y=y_0+t$ приводят к системе трех уравнений относительно неизвестных $f(t)$, $f(-t)$, $f(2y_0+t)$. Из этой системы исключаем $f(-t)$ и $f(2y_0+t)$, если это возможно, получая тем самым выражение для $f(t)$. Это выражение содержит не более двух постоянных $a=f(0)$ и $b=f(y_0)$. Проверка позволяет определить значения a и b, при которых найденный класс функций действительно является решением.

Проиллюстрируем описанный метод еще на одном примере.

Задача 4. Решить уравнение

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y.$$

Заметим, что при $y=\frac{\pi}{2}$ исчезает член, содержащий $f(x)$. Выполняя последовательно замены $x=0$, $y=t$; $x=\frac{\pi}{2}+t$, $y=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}+t$, получим систему уравнений

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t$$
$$f(\pi+t)+f(t)=0$$
$$f(\pi+t)+f(-t)=-2b\sin t,$$

где $a=f(0)$, $b=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда

$$f(t)=a\cos t+b\sin t.$$

Проверка показывает, что найденное выражение является решением задачи 4 при любых a и b.

Укажем другие наборы подстановок, применение которых позволяет решить некоторые типы функциональных уравнений, содержащих $f(x+y)$, $f(x-y)$, $f(x)$, $f(y)$, x, y.

Для решения функционального уравнения

$$f(x)f(x+y)=(f(y))^2(f(x-y))^2e^{y+4} \tag{7}$$

следует выполнить подстановки $x=0, y=t$; $x=0$, $y=-t$.

Применением подстановок $x=0$, $y=t$; $x=t$, $y=2t$; $x=t$, $y=-2t$ решаем уравнение

$$f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-y. \tag{8}$$

Заметим, что метод, примененный к решению задач 3 и 4, не приводит к желаемому результату при решении уравнения (8), так как нельзя указать значение переменной y, при котором исчезает член с $f(x)$.

С помощью последовательного применения подстановок $x=0$, $y=t$; $x=t$, $y=2t$; $x=2t$, $y=t$; $x=t$, $y=t$ можно решить функциональное уравнение

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=y-2. \tag{9}$$

К уравнениям подобного типа приводятся уравнения, содержащие $f(xy)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$, $f(x)$, $f(y)$, x, y. Для этого достаточно произвести замену $x=e^z$, $y=e^t$. Например, уравнение

$$g(xy)+2g\left(\frac{x}{y}\right)=3g(x)-\ln y,\ y>0,\ x>0, \tag{10}$$

приводится к уравнению (8), где $f(t)=g(e^t)$. Вместе с тем уравнение (10) решается непосредственным применением набора подстановок $x=1$, $y=t$; $x=t$, $y=t^2$; $x=t$, $y=\frac{1}{t^2}$.

Возможны и другие приемы приведения функциональных уравнений к уравнениям описанного вида. Так, в уравнениях, содержащих $f(x+ay)$, $f(x+(a-1)y)$, $f(x+(a+1)y)$, $f(y)$, y, x, $a\in \mathbf{Z}$, достаточно сделать замену $x+ay=t$, $y=z$.

Например, функциональное уравнение

$$2f(x+2y)+f(x)=f(x+y)(2e^y+e^{-y}) \tag{11}$$

заменой $x+y=t$, $y=z$ приводится к уравнению

$$2f(t+z)+f(t-z)=f(t)(2e^z+e^{-z}).$$

Последнее, в свою очередь, решается путем подстановок $t=0$, $z=u$; $t=u$, $z=2u$; $t=u$, $z=-2u$.

Упражнения

2. Решить функциональные уравнения (7), (8), (9), (11), приведенные в тексте.

3. Решить функциональные уравнения:

а) $xf(x+y)-2f(x-y)=f(x)(xe^{y}-2e^{-y})$;

б) $f(x^{y})=yf(x), \quad x>0$;

в) $2f(x+y)-f(x-y)-(1-y)f(x)=y(6x+x^{2}+y)$;

г) $f(x+y)-f(x-y)=2f(y)\cos x$.

§ 4. ГРУППЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В задаче 1, § 3, в уравнении $(a-x)f(x)-2xf(a-x)=1$ под знаком неизвестной функции f стоят функции $g_1=x$ и $g_2=a-x$. В результате замены x на $a-x$ получено еще одно уравнение, содержащее те же функции $f(x)$ и $f(a-x)$. Функции g_1 и g_2 образуют группу относительно композиции функций. Понятие группы позволяет в ряде случаев выбрать целесообразные подстановки для решения функциональных уравнений.

Становление теории групп произошло в начале XIX века при исследовании вопросов о решении алгебраических уравнений и связано с именем выдающегося французского математика Эвариста Галуа (1811—1832). В дальнейшем теория групп нашла применение в геометрии, физике, кристаллографии и стала математическим аппаратом для изучения всевозможных проявлений симметрии в математике и естествознании.

В основе определения групп лежит понятие *алгебраической операции*. Многочисленные примеры алгебраических операций дает школьный курс математики. Это известные арифметические операции сложения, вычитания, умножения действительных чисел, сложение векторов на плоскости, композиция перемещений, операции сложения, вычитания, умножения многочленов. Во всех случаях алгебраическая операция каждой упорядоченной паре a и b элементов произвольного множества G ставит в соответствие единственный элемент c того же множества. Операцию часто обозначают символами $+$, $\cdot$, $*$, $\circ$ и т. д., пишут $a*b=c$. Элемент c называют *произведением* a и b.

Обратим внимание на то, что в приведенных примерах результат выполнения операции над любыми двумя элементами множества снова является элементом того же множества. В то же время вычитание, деление на множестве натуральных чисел N нельзя считать алгебраическими операциями, так как выполнение этих действий может вывести за пределы множества N.

Упражнения

1. Являются ли алгебраическими операциями на множестве $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел:

а) сложение; б) умножение; в) деление; г) вычитание?

2. Проверить, является ли умножение алгебраической операцией на множестве всех целых степеней числа 2.

3. Является ли алгебраической операцией композиция функций на множестве многочленов второй степени?

4. Является ли алгебраической операцией скалярное умножение векторов плоскости?

Произведения $a * b$ и $b * a$ могут оказаться одинаковыми или различными. Например, сумма $\vec{a} + \vec{b}$ любых векторов равна $\vec{b} + \vec{a}$; $ab = ba$ для обычного умножения действительных чисел. Если $a * b = b * a$ для любых элементов a и b множества G, то операцию «$*$» называют *коммутативной*. Вычитание на множестве целых чисел не является коммутативной операцией.

Таблица 1

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Если для произвольных элементов a, b, c множества G имеем $(a * b) * c = a * (b * c)$, то операцию «$*$» называют *ассоциативной*. Композиция перемещений пространства, композиция отображений множества на множество, сложение и умножение действительных чисел являются ассоциативными алгебраическими операциями. Операция деления положительных чисел не ассоциативна.

Перейдем к определению группы.

Группой называется множество G, в котором определена алгебраическая операция (назовем ее умножением), удовлетворяющая следующим свойствам:

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ для любых a, b, c из множества G (свойство ассоциативности операции);

2) существует единичный элемент $e \in G$ такой, что для всех $a \in G$ имеем $a * e = e * a = a$;

3) для каждого $a \in G$ существует обратный элемент $a^{-1} \in G$ такой, что $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Так, множество положительных рациональных чисел является группой относительно операции умножения. Множество векторов плоскости образует группу относительно сложения (здесь роль единичного элемента играет нулевой вектор, а роль обратного элемента — противоположный вектор). Множество $\{-1;\ 1\}$ является группой по умножению.

Весьма распространен табличный способ задания групп на конечном множестве. Если $G = \{e,\ a,\ b\}$, то операцию умножения, относительно которой G — группа, можно задать табл. 1.

В верхней строке и левом столбце (входы таблицы) выписаны элементы множества G. Результат операции над элементами записан на пересечении соответствующих строки и столбца. Так, $a \cdot b = e$, $b \cdot e = b$ и т. д. Из таблицы видим, что e является единичным элементом, т. е. $ex = xe = x$ для любого $x \in G$. Элемент e обратный самому себе, a и b взаимно-обратны. Наиболее громоздки выкладки, связанные с проверкой ассоциативности операции. Так, если множество G состоит из n элементов, то проверка ассоциативности сводится к установлению справедливости n^3 равенств вида $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \times \times z)$, $x, y, z \in G$. В нашем случае не следует выписывать все 27 равенств. Если один из сомножителей равен e, то равенство очевидно. Непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$(a \cdot a) \cdot a = e = a \cdot (a \cdot a); \quad (b \cdot a) \cdot a = a = b \cdot (a \cdot a);$$
$$(a \cdot b) \cdot b = b = a \cdot (b \cdot b); \quad (b \cdot b) \cdot b = e = b \cdot (b \cdot b);$$
$$(b \cdot b) \cdot a = b = b \cdot (b \cdot a); \quad (a \cdot b) \cdot a = a = a \cdot (b \cdot a);$$
$$(a \cdot a) \cdot b = a = a \cdot (a \cdot b); \quad (b \cdot a) \cdot b = b = b \cdot (a \cdot b).$$

Количество элементов конечной группы называют *порядком группы*. Приведенная выше группа имеет порядок 3.

Упражнения

5. Выяснить, образуют ли группу следующие множества относительно указанных операций:

а) целые степени числа 2 относительно умножения;

б) совокупность всех подмножеств данного конечного множества относительно объединения множеств;

в) множество всех целых чисел, кратных натуральному n, относительно сложения;

г) множество $\boldsymbol{R}$ относительно умножения;

д) множество четных чисел относительно умножения.

6. Доказать, что совокупность четырех букв a_0, a_1, a_2, a_3, умножение которых определено таблицей

*	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

является группой.

Приведем примеры конечных групп, определенных на некоторых множествах функций действительного аргумента, относительно композиции.

Пример. Функции $f_1 = x$, $f_2 = \frac{x-1}{x+1}$, $f_3 = -\frac{1}{x}$, $f_4 = \frac{x+1}{1-x}$, определенные на $R\setminus\{0, -1, 1\}$, образуют группу четвертого порядка. Здесь

$$f_2 \circ f_3 = f_2(f_3(x)) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \frac{x+1}{1-x} = f_4,$$

$$f_4 \circ f_2 = f_4(f_2(x)) = \frac{\frac{x-1}{x+1} + 1}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = x = f_1.$$

Результаты всех «умножений» внесем в табл. 2.

Вычисления, необходимые для составления таблицы, рекомендуем выполнить самостоятельно.

В приведенном примере группы единичным элементом является функция $f_1 = x$ с указанной областью определения. Это нетрудно заметить, рассматривая табл. 2, где строка и столбец, соответствующие x, повторяют входы таблицы.

Функции f_2 и f_4 являются взаимно-обратными элементами группы: $f_2 \circ f_4 = f_4 \circ f_2 = f_1$. Предлагаем самостоятельно отыскать по таблице умножения остальные пары взаимно-обратных элементов. Обращаем внимание на то, что в каждой строке и каждом столбце таблицы умножения стоят все элементы группы в некотором порядке.

Покажем, как этот и подобные ему примеры групп могут быть использованы при решении функциональных уравнений.

Пусть в функциональном уравнении

$$a_0 g(f_0) + a_1 g(f_1) + \cdots + a_{n-1} g(f_{n-1}) = b \tag{1}$$

выражения $f_0(x) = x$, $f_1(x)$, ..., $f_{n-1}(x)$, стоящие под знаком неизвестной функции $g(x)$, являются элементами конечной группы порядка n относительно композиции функций. Коэффициенты уравнения (1) a_0, a_1, ..., a_{n-1}, b в общем случае зависят от x. Некоторые из них могут равняться 0. Предположим, что уравнение (1) имеет решение. Заменим x на $f_1(x)$. Эта замена равносильна умножению справа всех элементов группы на f_1. В результате последовательность функций f_0, f_1, ..., f_{n-1}

перейдет в последовательность $f_0 \circ f_1$, $f_1 \circ f_1$, $f_2 \circ f_1$, ..., $f_{n-1} \circ f_1$, состоящую из всех элементов группы. Обращаем внимание на то, что получены элементы второго столбца таблицы умножения (соответствующего f_1).

Произведенная замена перевела уравнение (1) — линейное относительно неизвестных $g(f_0)$, $g(f_1)$, ..., $g(f_{n-1})$ — в новое линейное уравнение относительно тех же неизвестных. За-

Таблица 2

$\circ$	x	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$
x	x	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$
$\frac{x-1}{x+1}$	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	x
$-\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	x	$\frac{x-1}{x+1}$
$\frac{x+1}{1-x}$	$\frac{x+1}{1-x}$	x	$\frac{x-1}{x+1}$	$-\frac{1}{x}$

меняя далее $x \to f_2(x)$, $x \to f_3(x)$, ..., $x \to f_{n-1}(x)$, получим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

Решая эту систему, находим неизвестную функцию $g(f_0) = g(x)$, если, конечно, система имеет решение. Непосредственной проверкой следует убедиться, что полученная функция удовлетворяет исходному уравнению. Рассмотренный метод ограничивает область определения функции, так как приходится отбрасывать те значения аргумента, при которых элементы группы не имеют смысла.

Задача 1. Найти функцию $f(x)$, определенную на множестве действительных чисел, отличных от 0, 1, —1, и удовлетворяющую уравнению

$$xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1. \qquad (2)$$

Выражения x, $\frac{x-1}{x+1}$, стоящие под знаком неизвестной функции f, являются элементами группы, заданной табл. 2. Заменяя последовательно x на $\frac{x-1}{x+1}$, $-\frac{1}{x}$, $\frac{x+1}{1-x}$, получим систему

$$\begin{cases} xf(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1, \\ \frac{x-1}{x+1} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1, \\ -\frac{1}{x} f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1, \\ \frac{x+1}{1-x} f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1. \end{cases}$$

Последовательно исключая неизвестные $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, имеем

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)}, \quad x \neq -1.$$

Рассуждения вытекали из предположения, что решение уравнения (4) существует. Подставляя в (4) полученную функцию, убедимся, что она удовлетворяет уравнению.

Задача 2. Найти функцию $f(x)$, $x \neq 0$, $x \neq a$, удовлетворяющую уравнению

$$f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x, \tag{3}$$

где a — постоянная, отличная от 0.

Нетрудно проверить, что выражения x, $\frac{a^2}{a-x}$ вместе с $\frac{ax-a^2}{x}$ составляют группу с табл. 3. Здесь $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0, a\}$.

Рассуждая аналогично решению задачи 1, получим систему

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) = x, \\ f\left(\frac{a^2}{a-x}\right) + f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) = \frac{a^2}{a-x}, \\ f\left(\frac{ax-a^2}{x}\right) + f(x) = \frac{ax-a^2}{x}. \end{cases}$$

Из нее находим $f(x) = \frac{x^3 - a^2x + a^3}{2x(x-a)}$. Проверка показывает, что эта функция удовлетворяет уравнению.

Иногда в функциональном уравнении выражения, стоящие под знаком неизвестной функции, являются значениями элементов некоторой группы от одной и той же функции g. После замены $g(x)$ на x получаем уравнение, которое решается изложенным выше методом.

Таблица 3

$\cdot$	x	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$
x	x	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$
$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{a^2}{a-x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$	x
$\frac{ax-a^2}{x}$	$\frac{ax-a^2}{x}$	x	$\frac{a^2}{a-x}$

Задача 3. Найти $f(x)$ из уравнения

$$af(x-1)+bf(1-x)=cx.$$

Выражения $x-1$ и $1-x$ можно рассматривать как значения элементов группы второго порядка $\{x, -x\}$ от функции $g(x)=x-1$. Заменяя $x-1$ на x, получим уравнение

$$af(x)+bf(-x)=c(x+1).$$

Решая его (используем группу $\{x, -x\}$), найдем

$$f(x)=\frac{c}{a-b}x+\frac{c}{a+b}, \quad \text{если } a^2\neq b^2;$$

$f(x)$ не существует, если $a^2=b^2$, $c\neq 0$;
$f(x)$ — любая нечетная функция, если $a=b$, $c=0$;
$f(x)$ — любая четная функция, если $a=-b$, $c=0$.

Под знаком неизвестной функции f могут стоять не элементы группы, а более сложные выражения, образованные из них. Для решения таких уравнений приходится угадывать, из элементов какой группы образованы эти выражения и значениями каких функций они являются.

Задача 4. Найти функцию $f(x)$, $x\neq 0$, $x\neq 1$, удовлетворяющую уравнению

$$f\left(\frac{x}{1-x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=x. \qquad (4)$$

При внимательном рассмотрении уравнения (4) можно заметить, что функции $\frac{x}{1-x}$ и $-\frac{1}{x}$ являются обычными произведениями взятых по 2 элементов группы $g_1 = x$, $g_2 = \frac{1}{1-x}$, $g_3 = \frac{x-1}{x}$; $x \neq 0$, $x \neq 1$ (см. табл. 3 при $a = 1$). А именно

$$\frac{x}{1-x} = x \cdot \frac{1}{1-x} = g_1 \cdot g_2; \quad -\frac{1}{x} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-1}{x} = g_2 \cdot g_3.$$

Заменяя последовательно $x \to \frac{1}{1-x}$, $x \to \frac{x-1}{x}$, получим систему уравнений (совместно с (4))

$$\begin{cases} f(g_1g_2) + f(g_2g_3) = x, \\ f(g_2g_3) + f(g_3g_1) = \frac{1}{1-x}, \\ f(g_3g_1) + f(g_1g_2) = \frac{x-1}{x}. \end{cases}$$

Отсюда

$$f(g_1g_2) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{2x(1-x)},$$

$$f(x) = -\frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{2x(x+1)}.$$

Проверкой убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет условию.

Анализ решения приведенной задачи показывает, что выражения g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1, стоящие под знаком f, при выполненных подстановках переходят друг в друга. Подобным свойством обладают члены так называемых симметрических многочленов от нескольких неизвестных. Многочлен $x + y + xy$ является примером симметрического многочлена от двух неизвестных, он подсказан формулами Виета для корней квадратного трехчлена. Симметрическими многочленами от трех неизвестных являются xyz, $x^3 + y^3 + z^3$, $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ и др. Все эти многочлены от любой перестановки неизвестных не меняются. Например, многочлен $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2$ при замене $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$ переходит в равный многочлен $y^2z^2 + y^2x^2 + z^2x^2$. То же самое произойдет при любой из 6 возможных перестановок трех неизвестных. Рекомендуем проверить это самостоятельно.

В задаче 4 под знаком неизвестной функции стояли члены симметрического многочлена $g_1g_2 + g_1g_3 + g_2g_3$. Выполненные «групповые» подстановки переводят g_1, g_2, g_3 друг в друга, т. е. осуществляют перестановку элементов группы. В результате каждый член симметрического многочлена переходит в некоторый член того же многочлена.

Вернемся опять к группе четвертого порядка, заданной табл. 2. При внимательном рассмотрении можно обнаружить, что

$$f_2^1 = f_2,$$
$$f_2^2 = f_2 \circ f_2 = f_3,$$
$$f_2^3 = f_2 \circ f_2 \circ f_2 = f_4,$$
$$f_2^4 = f_2 \circ f_2 \circ f_2 \circ f_2 = f_1.$$

Таким образом, все элементы этой группы являются «степенями» одного и того же элемента f_2. Этот элемент называют *образующим,* а саму группу — *циклической четвертого порядка.*

Отмеченное свойство группы позволяет без труда решить следующую задачу.

Задача 5. Найти хотя бы одну функцию вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, для которой равенство $f(f(f(f(x)))) = x$ является тождеством, а равенство $f(f(x)) = x$ не является тождеством (каждое в своей области определения).

Ясно, что функция $f_2 = \frac{x-1}{x+1}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, удовлетворяет условиям задачи.

Предлагаем самостоятельно убедиться, что функция $f_4 = \frac{x+1}{1-x}$, $x \neq -1$, $x \neq 0$, тоже является решением задачи, т. е. f_4 является образующим элементом группы.

При решении задачи 5 использовали циклическую группу четвертого порядка, элементами которой являются дробно-линейные функции. Ранее уже рассматривали циклические группы второго $\{x, a-x\}$ и третьего $\left\{x, \frac{a^2}{a-x}, \frac{ax-a^2}{x}\right\}$ порядков. В последнем примере $x \neq 0$; $x \neq a$. Возникает вопрос, существует ли для любого $n \in N$ циклическая группа дробно-линейных функций n-го порядка относительно алгебраической операции — композиции функций. Положительный ответ на этот вопрос дает пример группы с образующим элементом

$$f = \frac{x\cos\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n}}{x\sin\frac{\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{n}}, \quad n \in N, \quad x \neq -\operatorname{ctg}\frac{m\pi}{n}, \quad m = \overline{2, n-1}.$$

При этом область определения всех элементов группы одна и та же: она состоит из всех действительных чисел за исключением тех значений x, при которых знаменатель хотя бы одного элемента обращается в нуль. Методом индукции докажем, что

$$f^k = \frac{x\cos\dfrac{k\pi}{n} - \sin\dfrac{k\pi}{n}}{x\sin\dfrac{k\pi}{n} + \cos\dfrac{k\pi}{n}}, \quad k \in N. \qquad (5)$$

Действительно, при $k = 1$ утверждение очевидно. Пусть (5) справедливо для $k = s$. Докажем, что оно выполняется для $k = s + 1$.

$$f^{s+1} = f^s \circ f = \frac{\cos\dfrac{s\pi}{n} \cdot \dfrac{x\cos\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{\pi}{n}}{x\sin\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{\pi}{n}} - \sin\dfrac{s\pi}{n}}{\sin\dfrac{s\pi}{n} \cdot \dfrac{x\cos\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{\pi}{n}}{x\sin\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{\pi}{n}} + \cos\dfrac{s\pi}{n}} =$$

$$= \frac{x\left(\cos\dfrac{s\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{s\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right) - \left(\sin\dfrac{s\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{s\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right)}{x\left(\sin\dfrac{s\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n} + \cos\dfrac{s\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right) + \left(\cos\dfrac{s\pi}{n}\cos\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{s\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\right)} =$$

$$= \frac{x\cos\dfrac{(s+1)\pi}{n} - \sin\dfrac{(s+1)\pi}{n}}{x\sin\dfrac{(s+1)\pi}{n} + \cos\dfrac{(s+1)\pi}{n}}.$$

Следовательно, утверждение справедливо при всех $k \in N$. Ясно, что $f^n = x$. В то же время $f^k \neq x$ при $0 < k < n$. В самом деле, пусть

$$\frac{x\cos\dfrac{k\pi}{n} - \sin\dfrac{k\pi}{n}}{x\sin\dfrac{k\pi}{n} + \cos\dfrac{k\pi}{n}} = x.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x\cos\dfrac{k\pi}{n} - \sin\dfrac{k\pi}{n} = x^2\sin\dfrac{k\pi}{n} + x\cos\dfrac{k\pi}{n}, \\ x\sin\dfrac{k\pi}{n} + \cos\dfrac{k\pi}{n} \neq 0, \end{cases}$$

что равносильно

$$\begin{cases} (x^2+1)\sin\dfrac{k\pi}{n}=0, \\ x\sin\dfrac{k\pi}{n}+\cos\dfrac{k\pi}{n}\neq 0. \end{cases}$$

Так как $x^2+1\neq 0$, то $\sin\frac{k\pi}{n}=0$. Это невозможно ни при каком $0<k<n$.

Найдено частное решение следующей геометрической задачи. Найти кривые, обладающие свойством: берется произвольная точка на кривой; затем строится вторая точка, абсцисса которой равна ординате первой точки; этот процесс повторяется n раз (n — фиксировано), причем ордината последней точки равна абсциссе первоначальной. Такие кривые иногда называют периодическими кривыми n-го порядка.

Приведем примеры ряда групп, которые могут быть использованы при решении функциональных уравнений:

$$G_1=\left\{x,\ \frac{a}{x}\right\},\ \text{здесь и далее } a\neq 0;$$

$$G_2=\left\{x,\ \frac{a}{x},\ -x,\ -\frac{a}{x}\right\},$$

$$G_3=\left\{x,\ \frac{1}{x},\ -x,\ -\frac{1}{x},\ \frac{x-1}{x+1},\ \frac{1-x}{x+1},\ \frac{x+1}{x-1},\ \frac{x+1}{1-x}\right\},$$

$$G_4=\left\{x,\ \frac{a^2}{x},\ a-x,\ \frac{ax}{x-a},\ \frac{ax-x^2}{x},\ \frac{a^2}{a-x}\right\},$$

$$G_5=\left\{x,\ \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}},\ \frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1},\ -\frac{1}{x},\ \frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}},\ \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}\right\},$$

$$G_6=\left\{x,\ \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}},\ \frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1},\ -\frac{1}{x},\ \frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}},\ \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x},\ \frac{1}{x},\ \frac{x+\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-1},\ \frac{x\sqrt{3}+1}{x-\sqrt{3}},\ -x,\ \frac{1-x\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}},\ \frac{\sqrt{3}-x}{x\sqrt{3}+1}\right\}.$$

Как обычно, из области определения каждого элемента группы исключаются те значения x, при которых хотя бы один элемент не имеет смысла. Этот набор групп можно значительно расширить путем следующих несложных построений.

Пусть $G = \{g_1 = x, g_2, \ldots, g_n\}$ — конечная группа функций относительно композиции. Выберем произвольную обратимую функцию $\varphi = \varphi(x)$. Обозначим

$$G_\varphi = \{\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi,\ \varphi^{-1} \circ g_2 \circ \varphi,\ \ldots,\ \varphi^{-1} \circ g_n \circ \varphi\}.$$

Покажем, что G_φ — группа. Композиция двух произвольных элементов G_φ принадлежит множеству G_φ:

$$(\varphi^{-1} \circ g_i \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ g_k \circ \varphi) = \varphi^{-1} \circ (g_i \circ g_k) \circ \varphi.$$

Как известно, операция композиции обладает свойством ассоциативности. Единичным элементом в множестве G_φ является

$$\varphi^{-1} \circ g_1 \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ x \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = x.$$

Если g_i и g_k — взаимно-обратные элементы группы G, т. е. $g_i \circ g_k = g_k \circ g_i = x$, то $(\varphi^{-1} \circ g_i \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ g_k \circ \varphi) = x$ и $(\varphi^{-1} \circ g_k \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ g_i \circ \varphi) = x$. Следовательно, для каждого элемента G_φ существует в этом множестве обратный элемент.

Приведенные построения могут сузить область определения функций, входящих в группу.

Проиллюстрируем описанную конструкцию на конкретных примерах. Пусть $G = \{x,\ 1 - x\}$, $\varphi = \varphi(x) = e^x$. Тогда $\varphi^{-1} = \ln x$;

$$G_\varphi = \{x,\ \ln(1 - e^x)\}, \quad x < 0.$$

Если $G = \left\{x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x}\right\}$, $\varphi = x^n$, n — нечетное, то

$$\varphi^{-1} = \sqrt[n]{x},\ G_\varphi = \left\{x,\ \sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}},\ \sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right\},$$

$$x \neq 0; \quad x \neq 1.$$

Решим с помощью построенных групп следующие задачи.

Задача 6. Найти решение функционального уравнения

$$\ln(1 - e^x) f(x) - 2xf(\ln(1 - e^x)) = 1,\ x < 0. \qquad (6)$$

Произведя замену $x \to \ln(1 - e^x)$, получим уравнение

$$xf(\ln(1 - e^x)) - 2\ln(1 - e^x) f(x) = 1.$$

Решая его совместно с (6), найдем $f(x) = -\frac{1}{\ln(1 - e^x)}$.

Задача 7. Решить функциональное уравнение

$$f(x) + f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n - 1}{x^n}}\right) = \sqrt[n]{1 + x^n},\quad x \neq 0,\quad x \neq 1, \qquad (7)$$

где n — нечетное.

Заменим последовательно в уравнении (7) $x \to \sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}$, $x \to \sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}$. Получим:

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{x^n-1}{x^n}}\right)+f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right)=\sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}},$$

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{1-x^n}}\right)+f(x)=\sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}}.$$

Отсюда

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{1+x^n}+\sqrt[n]{\frac{2-x^n}{1-x^n}}-\sqrt[n]{\frac{2x^n-1}{x^n}}\right).$$

Рассмотрим функциональные уравнения, в которых под знаком неизвестной функции стоят, кроме выражений, зависящих от x, и константы.

Задача 8. Решить уравнение

$$2f(x)+f(1-x)=3-xf(1). \tag{8}$$

На множестве $\{x,\ 1-x,\ 1,\ 0\}$ определена операция композиции, если рассматривать числа 1 и 0 как функции, тождественно равные константе. Таблица умножения здесь имеет вид:

$\cdot$	x	$1-x$	1	0
x	x	$1-x$	1	0
$1-x$	$1-x$	x	0	1
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0

Из таблицы видно, что для элементов 1 и 0 не существует обратных, т. е. данное множество функций не является группой. В алгебре множества с ассоциативной операцией называют *полугруппами*. Полугруппы в отдельных случаях можно применить к решению функциональных уравнений.

Делая в (8) последовательно замены $x \to 1-x$, $x \to 1$,

$x \to 0$, получим систему

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) + xf(1) = 3, \\ 2f(1-x) + f(x) + (1-x)f(1) = 3, \\ 2f(1) + f(0) + f(1) = 3, \\ 2f(0) + f(1) = 3. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений имеем $f(1) = \frac{3}{5}$. Теперь из первых двух уравнений найдем: $f(x) = \frac{6-3x}{5}$. Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет уравнению (8).

Упражнения

7. Решить уравнение в классе функций, определенных на $R \setminus \{0\}$:

$$xf(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 3.$$

8. Найти $f(x)$, если

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) + xf\left(\frac{1}{x}\right) = 2.$$

9. Найти $f(x)$, если $af(x^n) + f(-x^n) = bx$, где $a \neq 1$, n — нечетное число.

10. Найти хотя бы одну функцию, удовлетворяющую уравнению $f(f(f(x))) = -\frac{1}{x}$ и не удовлетворяющую уравнению $f(f(x)) = -x$.

11. Найти функцию, определенную при $x \neq 0$ и удовлетворяющую уравнению

$$(x-2)f(x) + f\left(-\frac{2}{x}\right) - xf(2) = 5.$$

12. Решить функциональное уравнение

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x$$

в классе функций $f(x)$, для которых $D(f) = R \setminus \{0; 1\}$.

§ 5. МАТРИЦЫ И ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

В большинстве задач § 4 под знаком неизвестной функции стояли дробно-линейные выражения вида $\frac{ax+b}{cx+d}$. Такие дроби полностью определяются заданием таблицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов a, b, c, d.

Например, выражениям $\frac{x-2}{-3x+4}$, $\frac{x+1}{x}$, $\frac{3x}{5x-2}$, $x-1$, $\frac{1}{x}$, $-x$ можно поставить в соответствие следующие таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подобные таблицы принято в математике называть матрицами 2-го порядка (по числу строк и столбцов, содержащихся в них). Матрицы — очень важный объект в математике. Они нашли применение в теории систем линейных уравнений, геометрии, алгебре, механике, физике. Во всех приложениях существенно то, что над матрицами можно выполнять некоторые действия. Одну из операций изучим подробнее в связи с композицией дробно-линейных функций.

При решении функциональных уравнений необходимо искать композицию функций $f_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$ и $f_2(x) = \frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$. Найдем выражение для $f_1 \circ f_2$:

$$f_1(f_2(x)) = \frac{a_1\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}+b_1}{c_1\frac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}+d_1} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1c_2)x+(a_1b_2+b_1d_2)}{(c_1a_2+d_1c_2)x+(c_1b_2+d_1d_2)}, \quad c_2x+d_2 \neq 0.$$

В результате получено выражение для дробно-линейной функции (обратите внимание на ее область определения).

Предполагаем, что выражения c_1x+d_1 и c_2x+d_2 тождественно не равны нулю, т. е. c_1 и d_1, а также c_2 и d_2 не равны нулю одновременно. При этих предположениях $c_1a_2+d_1c_2$ и $c_1b_2+d_1d_2$ в выражении для $f_1(f_2(x))$ вместе в нуль не обращаются, если только композиция $f_1 \circ f_2$ определена.

Действительно, пусть

$$c_1a_2+d_1c_2=0, \tag{1}$$

$$c_1b_2+d_1d_2=0. \tag{2}$$

Возможны следующие 4 случая:

1) $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$; 2) $c_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$;

3) $c_2 \neq 0$, $d_1 \neq 0$; 4) $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$.

Детально разберем первый случай. Поскольку $c_2 \neq 0$, то из (1) получим $d_1 = -\frac{c_1 a_2}{c_2}$, а (2) примет вид $c_1 b_2 - \frac{c_1 a_2}{c_2} d_2 = 0$, или, так как $c_1 \neq 0$, то $c_2 b_2 = a_2 d_2$. Если $b_2 \neq 0$, то $a_2 \neq 0$ и $d_2 \neq 0$. Обозначим $\frac{d_2}{c_2} = \frac{b_2}{a_2} = k$. При этом функция $f_2(x) = \frac{a_2 x + k a_2}{c_2 x + k c_2} = \frac{a_2}{c_2}$ при $x \neq -k$. Но $x = -k$ не входит в область определения $f_2(x)$, так как при этом $c_2 x + d_2 = -c_2 \frac{d_2}{c_2} + d_2 = 0$.

Заметим, что если $f_2(x)$ тождественно равна константе c, то $f_1(f_2(x)) = f_1(c)$. В нашем случае $c = \frac{a_2}{c_2} = -\frac{d_1}{c_1}$. Однако знаменатель дроби $f_1(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$ при подстановке $x = -\frac{d_1}{c_1}$ обращается в нуль, т. е. $\frac{a_2}{c_2}$ не входит в область определения $f_1(x)$.

Если же $b_2 = 0$, то $a_2 = 0$ или $d_2 = 0$.

При $a_2 = 0$ $d_1 = 0$; $f_2(x) \equiv 0$ и знаменатель $c_1 x + d_1$ функции $f_1(x)$ обращается в нуль.

При $d_2 = 0$ $f_2(x) = \frac{a_2 x}{c_2 x} = \frac{a_2}{c_2}$ ($x \neq 0$, так как знаменатель $f_2(x)$ отличен от нуля). И опять $\frac{a_2}{c_2}$ не входит в область определения $f_1(x)$.

Случаи 2) — 4) исследуются аналогично.

Упражнения

1. Доказать, что равенства (1) и (2) одновременно не имеют места при указанных выше предположениях.

2. Найти область определения композиции $f_1 \circ f_2$ следующих функций:

а) $f_1 = \frac{2x+3}{5x-1}$, $f_2 = \frac{x-2}{3x+4}$;

б) $f_1 = \frac{2x-1}{x+2}$, $f_2 = \frac{2x+1}{-x+2}$.

Функции $f_1(x) = \frac{a_1 x + b_1}{c_1 x + d_1}$ ставится в соответствие матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, функции $f_2(x) = \frac{a_2 x + b_2}{c_2 x + d_2}$ — матрица

$B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, а их композиции

$$f_1 \circ f_2(x) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)\,x + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)\,x + (c_1b_2 + d_1d_2)}$$

соответствует матрица

$$C = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

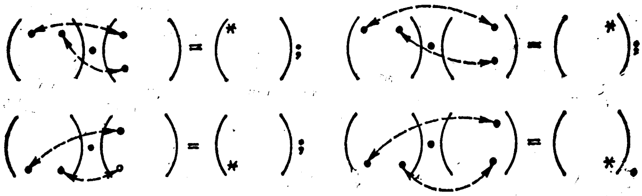

Рис. 6

Матрицу C называют *произведением матриц* A и B. При этом пишут $C = A \cdot B$. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) \\ -3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 & -3 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на кажущуюся сложность формулы умножения матриц, легко запомнить правило нахождения элементов произведения двух матриц. Так, элемент, стоящий в i-й строке k-м столбце ($i = 1,2$; $k = 1,2$) матрицы $C = A \cdot B$, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B (рис. 6).

Примеры. Найти композицию функций $f_1 \circ f_2$:

1. $f_1(x) = \dfrac{3x - 2}{-x + 4}$; $f_2(x) = \dfrac{-2x + 1}{3x + 2}$.

Вычислим произведение соответствующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f_1(f_2(x)) = \frac{-12x - 1}{14x + 7}, \quad x \neq -\frac{2}{3}.$$

2. $f_1(x) = \dfrac{13x - 4}{2x - 3x^2}$, $f_2(x) = \dfrac{x}{x - 1}$.

Функция $f_1(x)$ представима в виде $g_1(x)\cdot g_2(x)$, где

$$g_1(x)=\frac{13x-4}{2-3x},\quad g_2(x)=\frac{1}{x}.$$

Для того чтобы выполнить композицию $f_1(f_2(x))$, достаточно найти $q_1(f_2(x))$ и $q_2(f_2(x))$, а затем полученные выражения перемножить.

Поскольку $\begin{pmatrix}13 & -4\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times$ $\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, то $g_1(f_2(x))=\dfrac{9x+4}{-x-2}$, $x\neq 1$; $g_2(f_2(x))=\dfrac{x-1}{x}$, $x\neq 1$. Следовательно, $f_1(f_2(x))=$ $=\dfrac{(9x+4)(x-1)}{(-x-2)x}$, $x\neq 1$.

3. $f_1(x)=\dfrac{x+3}{-3x+1}$, $f_2(x)=\dfrac{3x+5}{-x+1}$.

Вычислим произведение соответствующих матриц:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 8\\ -10 & -14\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$f_1(f_2(x))=\frac{8}{-10x-14}=\frac{4}{-5x-7},\quad x\neq 1.$$

Обратим внимание на характер соответствия между дробно-линейными функциями и матрицами. Очевидно, одной и той же функции $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ соответствует класс матриц вида $\begin{pmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{pmatrix}$, где k — любое действительное число, отличное от нуля. Матрицу $kA=\begin{pmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{pmatrix}$ назовем произведением числа $k\in\boldsymbol{R}$ на матрицу $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Заметим, что две матрицы $\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}$ считаются равными, если равны их соответствующие элементы

$$a_i=b_i,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Отметим, что функциям, заданным одним и тем же выражением, но имеющим различные области определения, соответствует один и тот же класс матриц. Установлено соответствие между выражениями для дробно-линейных функций и классами матриц.

Легко проверить, что

$$(kA)\,B = A\,(kB) = k\,(AB) \tag{3}$$

для любого числа k и произвольных матриц A и B.

Соответствие между дробно-линейными выражениями и описанными классами матриц взаимно-однозначно. Приведенный выше анализ и равенства (3) показывают, что это соответствие сохраняется при выполнении действия композиции функций и умножения матриц.

Умножение матриц обладает теми же свойствами, что и композиция функций. Это можно проверить непосредственно.

1. Умножение матриц ассоциативно, т. е. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ для любых матриц A, B, C. Об ассоциативности композиции функций было сказано в предыдущем параграфе.

2. Матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется *единичной*. При умножении матриц она играет ту же роль, что и число 1 при умножении чисел, а именно $AE = EA = A$ для любой матрицы A. Класс матриц $kE = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ соответствует тождественному преобразованию $f(x) = x$.

3. Если функция $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ отлична от константы, т. е. $ad - bc \neq 0$, то для нее существует обратная функция $f^{-1}(x) = \dfrac{dx-b}{-cx+a}$. В самом деле, произведение соответствующих матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ равно матрице

$$\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\,E.$$

Аналогично,

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad-bc)\,E.$$

Матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

называется *обратной* к матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Она обладает тем свойством, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E. \tag{4}$$

Для композиции соответствующих функций имеем

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x.$$

Если же

$$ad - bc = 0, \tag{5}$$

т. е. $f(x)$ — константа, то обратной функции не существует.

Отсюда следует, что при выполнении условия (5) для

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

не существует матрицы A^{-1}, удовлетворяющей соотношению (4).

4. Ясно, что выражение для композиции $f \circ g$, вообще говоря, не совпадает с выражением для $g \circ f$. Так, если $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$, то $f \circ g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 0$, а $g \circ f(x) = 1 - x$, $x \neq 0$. В связи с этим можно сделать вывод, что умножение матриц не подчиняется коммутативному закону.

Свойства 1—4 позволяют решить матричное уравнение вида $AX = B$, если существует матрица A^{-1}, обратная A. Предполагая, что уравнение имеет решение, умножаем обе части его слева на A^{-1}. Получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$; $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$; $X = A^{-1}B$. Найденная матрица действительно удовлетворяет уравнению $AX = B$. Аналогично решается уравнение $XA = B$. Здесь умножаем обе части уравнения на A^{-1} справа. Получим $X = BA^{-1}$.

Упражнения

3. Доказать ассоциативность умножения матриц.

4. Используя умножение матриц, найти композиции $f_1 \circ f_2$ и $f_2 \circ f_1$ следующих функций:

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{3x-2}, \quad f_2(x) = \frac{-x+1}{2x-1}.$$

5. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Используя формулу обратной матрицы, найти $f^{-1}(x)$, если $f(x) = \frac{2x}{-x+2}$.

Изложенные сведения о матрицах позволяют не только упростить нахождение композиции дробно-линейных функций, но и указать новые методы для решения некоторых функциональных уравнений.

Задача 1. Найти функцию f, определенную при

$$x \in R \setminus \left\{-5;\ \frac{3}{5};\ 0;\ -\frac{1}{3};\ 1\right\}$$

и удовлетворяющую уравнению

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) - \frac{x+3}{2} f\left(\frac{x+3}{-3x+5}\right) = \frac{x^2-2x-2}{x}. \qquad (6)$$

Отыщем подстановку, переводящую выражения, стоящие под знаком неизвестной функции f в уравнении (6), друг в друга. Для этого положим $\frac{x+3}{-3x+5} = \frac{t}{t-2}$ $\left(x \neq \frac{5}{3};\ t \neq 2\right)$. Отсюда

$$tx + 3t - 2x - 6 = -3tx + 5t, \quad x = \frac{t+3}{2t-1} \left(t \neq \frac{1}{2}\right).$$

Кроме того, $\frac{x}{x-2} = \frac{\frac{t+3}{2t-1}}{\frac{t+3}{2t-1} - 2} = \frac{t+3}{-3t+5} \left(t \neq \frac{5}{3};\ t \neq \frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, подстановка $x \to \frac{x+3}{2x-1}$ — искомая. Уравнение (6) примет вид

$$f\left(\frac{x+3}{-3x+5}\right) - \frac{7x}{4x-2} f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{-11x^2+4x+13}{(x+3)(2x-1)}. \qquad (7)$$

В уравнении (6) $x \in R \setminus \left\{0;\ 2;\ \frac{5}{3}\right\}$. Подстановка $x \to \frac{x+3}{2x-1}$ переводит точки $0;\ 2;\ \frac{5}{3}$ соответственно в точки $-3;\ \frac{5}{3};\ 2$. Кроме того, из характера подстановки вытекает $x \neq \frac{1}{2}$. Поэтому в уравнении (7) $x \neq -3;\ \frac{5}{3};\ 2;\ \frac{1}{2}$. Область допустимых значений x в системе, составленной из уравнений (6) и (7), является пересечением соответствующих областей каждого из уравнений (6) и (7), т. е. $x \in R \setminus \left\{-3;\ \frac{5}{3};\ 2;\ \frac{1}{2};\ 0\right\}$.

Исключая из этой системы $f\left(\frac{x+3}{-3x+5}\right)$, получим

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right)=\frac{2(x-1)}{x},\quad \left(x\neq-3;\ \frac{5}{3};\ 2;\ \frac{1}{2};\ 0\right).$$

Обозначив $\frac{x}{x-2}=z$, получим $x=\frac{2z}{z-1}$. Из условия $x\neq$ $\neq-3;\ \frac{5}{3};\ 2;\ \frac{1}{2};\ 0$ получаем $z\neq\frac{3}{5};\ -5;\ -\frac{1}{3};\ 0$, а также $z\neq1$, что определяется видом подстановки.

Подстановка $x\to\frac{2x}{x-1}$ дает $f(x)=\frac{x+1}{x}$. Итак, функция $f(x)=\frac{x+1}{x}$ с областью определения $\boldsymbol{R}\setminus\left\{0;\ \frac{3}{5};-5;-\frac{1}{3};1\right\}$ является решением задачи 1, что и подтверждается проверкой.

Сужение области определения искомой функции удалением точек $x=-\frac{1}{3};\ 1$ вызвано методом решения уравнения. Несложные вычисления показывают, что функция $f(x)=$ $=\frac{x+1}{x}$, $x\neq-5;\ \frac{3}{5};\ 0$, удовлетворяет исходному уравнению.

В самом деле, полагая в (6) $x=\frac{1}{2}$, получим

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{7}{4}f(1)=-\frac{11}{2}.$$

Значения функции $f(x)=\frac{x+1}{x}$, $x\neq-5;\ \frac{3}{5};\ 0$, в точках $-\frac{1}{3}$ и 1 соответственно равны $f\left(-\frac{1}{3}\right)=-2$; $f(1)=2$ и удовлетворяют приведенному соотношению.

Более того, решение уравнения (6) в классе функций таких, что $D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\left\{-5;\ \frac{3}{5};\ 0\right\}$, имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x}, & \text{если } x\neq1;\ -\frac{1}{3};\\ a, & \text{если } x=1\quad (a\in\boldsymbol{R});\\ \frac{7}{4}a-\frac{11}{2}, & \text{если } x=-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

При решении задачи 1 подробно изложены вопросы, связанные с областью определения искомой функции. В дальнейшем подобные вопросы будут рассматриваться с меньшей детализацией.

Уравнение (6) решено, так как найдена подстановка $x \to \to \frac{x+3}{2x-1}$ переводящая дробно-линейные функции $\frac{x}{x-2}$ и $\frac{x+3}{-3x+5}$ друг в друга. На языке матриц это означает, что найдена матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ такая, что $AX = kB$; $BX = = lA$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad k \neq 0, \; l \neq 0.$$

Возникает вопрос, для любых ли дробно-линейных функций существует аналогичная подстановка; другими словами, для любых ли матриц A и B существует матрица X, удовлетворяющая уравнениям

$$AX = kB, \tag{8}$$

$$BX = lA \tag{9}$$

при некоторых k, l, отличных от нуля.

Предполагая, что такая матрица существует, из уравнений (8) и (9) получим: $(lA)\,X = (lk)\,B$, $(BX)\,X = (lk)\,B$,

$$BX^2 = (lk)\,B. \tag{10}$$

Предположим, что функции, соответствующие матрицам A и B, отличны от констант. Тогда, как показано выше, для A и B существуют обратные матрицы. Умножим обе части равенства (10) слева на B^{-1}. Получим

$$B^{-1}BX^2 = B^{-1}lkB; \quad EX^2 = lkE; \quad X^2 = mE,$$

где $m = lk$.

Найдем общий вид матрицы $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ такой, что $X^2 = = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, т. е.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

при некотором $m \neq 0$. Заметим, что $x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0$. Из правила умножения и условия равенства матриц имеем:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2x_3 = m, \\ x_1x_2 + x_2x_4 = 0, \\ x_1x_3 + x_3x_4 = 0, \\ x_2x_3 + x_4^2 = m. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения четвертое, получим $x_1^2 = x_4^2$, т. е. $x_1 = x_4$, либо $x_1 = -x_4$.

Если $x_1 = x_4$, то $x_1x_2 = 0$ и $x_1x_3 = 0$, что приводит к матрицам вида $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$ или $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$. Если же $x_1 = -x_4$, то придем к матрице

$$X_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}.$$

Проверкой убеждаемся, что матрицы X_2 и X_3 удовлетворяют уравнению $X^2 = mE$ при некотором m. Матрица X_3 при $x_1 = 0$ дает X_1.

Итак, матрицы вида $X_2 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$ и $X_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & -x_1 \end{pmatrix}$ и только они удовлетворяют уравнению $X^2 = mE$, $m \neq 0$. Из (9) имеем $X = lB^{-1}A$. Поэтому, если матрица $B^{-1}A$ имеет вид X_2 или X_3, то она удовлетворяет каждому из уравнений (8), (9).

Теперь изложим один из способов решения функционального уравнения вида

$$s(x) f\left(\frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}\right) + t(x) f\left(\frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}\right) = p(x), \qquad (11)$$

где $s(x)$, $t(x)$, $p(x)$ — некоторые данные функции.

Решая матричное уравнение вида $A = BX$, где $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, получим $X = B^{-1}A$.

Если матрица X имеет вид $\begin{pmatrix} k & l \\ m & -k \end{pmatrix}$, то подстановка $x \to \frac{kx + l}{mx - k}$ в (11) даст второе уравнение относительно неизвестных

$$f\left(\frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}\right), \quad f\left(\frac{a_2x + b_2}{c_2x + d_2}\right).$$

Если полученная система имеет решение, то из нее найдем выражение для $f\left(\frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1}\right)$. Последнее дает возможность найти $f(x)$. Как обычно, обязательной частью решения является проверка. Случай $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$ тривиален, $A = x_1B$, т. е. выражения, стоящие в (11) под знаком f, совпадают.

Задача 2. Найти функцию f, определенную при $x \in R \diagup \left\{0; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}; -1\right\}$, удовлетворяющую уравнению

$$3f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) - 5f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{8}{x-1}. \qquad (12)$$

Решаем матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы A обратной является матрица $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда $A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица X имеет вид $\begin{pmatrix} k & l \\ m & -k \end{pmatrix}$, поэтому применим к уравнению (12) подстановку $x \to \frac{x}{2x-1}$. Последнюю удобно выполнять с помощью матриц. Правой части уравнения (12) соответствует матрица $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Применение к ней подстановки $x \to \frac{x}{2x-3}$ равносильно умножению $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ справа на $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. В результате получим $\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, из уравнения (12) находим

$$3f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) - 5f\left(\frac{x-1}{-3x+2}\right) = \frac{16x-8}{-x+1}. \qquad (13)$$

Исключив из системы, составленной из уравнений (12) и (13), $f\left(\frac{x}{-3x+2}\right)$, имеем

$$f\left(\frac{-x+1}{x-2}\right) = \frac{3x-4}{x-1}. \qquad (14)$$

Из (12) видим, что $x \neq \frac{2}{3}$; 2; 1. Подстановка сохранила эти ограничения. Кроме того, $x \neq \frac{1}{2}$.

Положим $\frac{-x+1}{x-2} = z$. Так как $x \neq \frac{2}{3}$; 2; 1; $\frac{1}{2}$, то $z \neq -\frac{1}{4}$; 0; $-\frac{1}{3}$. Отсюда $x = \frac{2z+1}{z+1}$. Заменяя $x \to \frac{2x+1}{x+1}$, из (14) получим

$$f(x)=\frac{2x-1}{x},\quad x\neq-\frac{1}{4};\quad 0;\quad -\frac{1}{3};\quad -1.$$

Проверка показывает, что эта функция удовлетворяет условию задачи:

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix};$$

$$3\cdot\frac{5x-4}{x-1}-5\cdot\frac{-3x+4}{-x+1}=\frac{8}{x-1}.$$

Упражнения

7. Найти решение уравнения (12) среди функций, определенных при $x\in R\setminus\left\{0;\ -\frac{1}{4}\right\}$.

8. Найти функцию $f(x)$ с областью определения $D(f)=R\setminus\left\{-2;\ 0;\ \frac{1}{3}\right\}$, удовлетворяющую уравнению

$$2f\left(\frac{x}{x-1}\right)-3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)=\frac{13x-4}{2x-3x^2}.$$

9. Найти функцию $f(x)$, определенную при $x\neq 1;\ 3;\ -\frac{1}{3};\ -\frac{1}{2};\ 2$ и удовлетворяющую уравнению

$$(7x-6)\,f\left(\frac{x+2}{-3x+4}\right)+5f\left(\frac{x-3}{-2x+1}\right)=\frac{x^2+2x-5}{x-1}.$$

При решении задачи 2 было использовано преобразование $\varphi: x\to\frac{x}{2x-1}$, соответствующее матрице $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Вместе с тождественным преобразованием $\varepsilon: x\to x\ \left(x\neq\frac{1}{2}\right)$ оно образует группу второго порядка с таблицей умножения

$\cdot$	ε	φ
ε	ε	φ
φ	φ	ε

Из предыдущих рассуждений следует, что таким свойством обладает любое преобразование φ вида $\frac{ax+b}{cx-a}$. Это позволяет указать другой способ решений уравнений вида (6), (12), которые имеют следующую форму:

$$s(x)f(g(x)) + t(x)f(g(\varphi(x))) = p(x). \qquad (15)$$

Здесь, как и $\varphi(x)$, $g(x)$ — некоторая дробно-линейная функция, отличная от константы. Выполняя в (15) подстановку $x \to g^{-1}(x)$, придем к уравнению

$$s_1(x)f(x) + t_1(x)f(g\circ\varphi\circ g^{-1}(x)) = p_1(x). \qquad (16)$$

В предыдущем параграфе показано, что если $\{x, \varphi(x)\}$ — группа, то $\{x, g\circ\varphi\circ g^{-1}(x)\}$ — тоже группа. Для решения уравнения (16) можно применить групповую подстановку $x \to g\circ\varphi\circ g^{-1}(x)$.

При реализации данного метода удобно использовать матричный аппарат.

Задача 3. Решить функциональное уравнение

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2f\left(\frac{3x+1}{-2x-2}\right) = \frac{x}{2x+2}, \qquad (17)$$

где функция $f(x)$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$.

В уравнении (17) функция $g(x) = \frac{x}{x+1}$. Ей соответствует матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Изложенный метод применим, если функция $h(x) = \frac{3x+1}{-2x-2}$ с матрицей $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ представима в виде $h(x) = g\circ\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — дробно-линейная функция, отличная от константы с матрицей вида $\begin{pmatrix} k & l \\ m & -k \end{pmatrix}$. Предварительно нет необходимости выяснять, обладает ли функция $h(x)$ указанным свойством, как и нет необходимости находить функцию $\varphi(x)$. Выполняя подстановку $x \to g^{-1}(x)$, переведем $h(x)$ в функцию $h\circ g^{-1}(x) = g\circ\varphi\circ g^{-1}(x)$, которая имеет вид $\frac{kx+l}{mx-k}$, тогда и только тогда, когда $\varphi(x)$ такого же вида.

Найдем функцию $h\circ g^{-1}(x)$. Соответствующая ей матрица равна $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. В полученной матрице диагональные элементы 2 и -2 — противоположные числа. Следовательно, функция $\frac{2x+1}{-2}$ является образующим элементом циклической группы порядка 2.

Подстановка $x \to g^{-1}(x)$ переводит (17) в уравнение

$$f(x) + 2f\left(\frac{2x+1}{-2}\right) = \frac{x}{2}\ (x \neq 1). \qquad (18)$$

Производим замену $x \to \frac{2x+1}{-2}$, получаем уравнение

$$f\left(\frac{2x+1}{-2}\right) + 2f(x) = \frac{2x+1}{-4}\left(x \neq -\frac{3}{2}\right). \qquad (19)$$

Из системы (18) — (19) $f(x) = \frac{3x+1}{-6}\left(x \neq 1;\ -\frac{3}{2}\right)$. Как и в задаче 1, устраняем ограничение на область определения $f(x)$. Проверку предоставляем читателю.

Замечание. Естественно возникает вопрос, не применим ли прием, которым решена задача 3, для уравнений вида

$$s(x)\, f(g(x)) + t(x)\, f(\varphi(g(x))) = p(x). \qquad (20)$$

Подстановка $x \to g^{-1}(x)$ приводит (20) к уравнению

$$s_1(x)\, f(x) + t_1(x)\, f(\varphi(x)) = p_1(x).$$

Если функции x и $\varphi(x)$ образуют группу относительно композиции, т. е. если $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$, то решаем полученное уравнение групповой подстановкой.

Уравнения (20) и (15) одновременно приводятся или не приводятся к уравнению, где под знаком неизвестной функции стоят элементы циклической группы второго порядка. Это следует из того, что если для матриц второго порядка $B = CA$, где $C^2 = E$, то $B = AD$, где $D^2 = E$. В этом можно убедиться, положив $D = B^{-1}C^{-1}B$. Подчеркнем, что функции, соответствующие A и B, отличны от констант.

Упражнение

10. Решить уравнения (6), (12) методом, использованным при решении задачи 3.

При решении уравнений вида (11), (15), (20) использовалась циклическая группа второго порядка. Образующему элементу группы соответствовала матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.

Найдем общий вид дробно-линейной функции, порождающей циклические группы более высоких порядков. Это расширит класс функциональных уравнений, решаемых методом подстановок.

Будем искать матрицы второго порядка, удовлетворяющие уравнению $X^3 = kE$ при некотором $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Это равносильно нахождению дробно-линейной функции, являющейся образующим элементом циклической группы третьего порядка.

Пусть $X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Равенство $X^3=kE$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x_1^3+2x_1x_2x_3+x_2x_3x_4=k, \\ x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_4^2=0, \\ x_1^2x_3+x_1x_3x_4+x_2x_3^2+x_3x_4^2=0, \\ x_1x_2x_3+2x_2x_3x_4+x_4^3=k. \end{cases}$$

Легко убедиться, что x_2 и x_3 одновременно обращаются или не обращаются в нуль. Если $x_2=x_3=0$, то получим $x_1=x_4=\sqrt[3]{k}$. Случай $x_2\neq 0$, $x_3\neq 0$ приводит к соотношению

$$x_1^2+x_2x_3+x_1x_4+x_4^2=0. \tag{21}$$

Из полученных классов матриц нужно исключить те матрицы, которые удовлетворяют уравнениям $X=mE$ или $X^2=lE$ при некоторых m, $l\in \boldsymbol{R}$. Они соответствуют дробно-линейным функциям, порождающим циклические группы порядков меньших 3. Окончательно получаем

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & -\dfrac{x_1^2+x_4^2+x_1x_4}{x_3} \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad x_1\neq -x_4, \tag{22}$$

что и подтверждается проверкой.

Аналогичные рассуждения приводят к матрице

$$A=\begin{pmatrix} a & -\dfrac{a^2+b^2}{2c} \\ c & b \end{pmatrix}, \quad a\neq -b,$$

соответствующей образующему элементу циклической группы четвертого порядка. Для доказательства можно воспользоваться тем, что функция, соответствующая A^2, порождает циклическую группу второго порядка.

Упражнения

11. Указать порядки циклических групп с образующими элементами:

а) $\dfrac{-2}{x+2}$, $x\neq 0$, $x\neq -1$; г) $\dfrac{3x+5}{-x+1}$, $x\neq -1$, $x\neq -3$;

б) $\dfrac{x-1}{3x+1}$, $x\neq \dfrac{1}{3}$; д) $\dfrac{x-3}{3x-1}$;

в) $\dfrac{2x+1}{-x-2}$; е) $\dfrac{x-3}{x+1}$, $x\neq 1$.

12. Показать, что функция $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$, $x\neq-1;\ -\frac{1}{2};\ 0;\ 1$, является образующим элементом циклической группы шестого порядка.

13. Дать полное доказательство условий, необходимых и достаточных для того, чтобы функция $\frac{ax+b}{cx+d}$ была образующим элементом циклической группы четвертого порядка.

14. Указать общий вид матриц, соответствующих дробно-линейным функциям, которые являются образующими элементами циклических групп шестого порядка.

Задача 4. Решить функциональное уравнение

$$xf\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+(x+3)f(2x+5)-f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)=\frac{(x+2)(x+1)}{2x+3}, \quad (23)$$

где функция $f(x)$ определена на множестве $R\setminus\{3;5;1;2;-1\}$.

Обозначим через $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ матрицы, соответствующие функциям, стоящим под знаком f в (23). Уравнение можно решить, если найти матрицу X, имеющую вид (22) и удовлетворяющую соотношениям $AX=B$, $BX=kC$. При этих условиях $CX=lA$. Получим

$$X \doteq A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}.$$

В соответствии с (22), матрица X удовлетворяет уравнению $X^3=kE$. Кроме того, $BX=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ -1 & -2\end{pmatrix}=-C$. Итак, подстановка $x\to\frac{x+3}{-x-2}$ переводит выражения, стоящие под знаком f в (23), друг в друга. Выполняя эту подстановку дважды, получим систему уравнений

$$\begin{cases} xf\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+(x+3)f(2x+5)-f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)=\frac{(x+2)(x+1)}{2x+3}, \\ \frac{x+3}{-x-2}f(2x+5)+\frac{2x+3}{x+2}f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)-f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\frac{x+1}{x(x+2)}, \\ \frac{-2x-3}{x+1}f\left(\frac{3x+4}{x+2}\right)+\frac{x}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-f(2x+5)= \\ =-\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}. \end{cases}$$

Решая ее, найдем

$$f(2x+5)=\frac{1}{2x+6}, \quad x\neq-1;\quad 0;\quad -2;\quad -\frac{3}{2};\quad -3.$$

После замены $x \to \frac{x-5}{2}$ окончательно получим

$$f(x)=\frac{1}{x+1}, \ x \neq 3; \quad 5; \quad 1; \quad 2.$$

Эта функция удовлетворяет задаче 4.

Уравнение (23) можно решить и подстановкой $x \to \frac{x+1}{-x+1}$. Последняя функция обратна $\frac{x-1}{x+1}$. В результате получим уравнение

$$\frac{x+1}{-x+1} f(x)+\frac{-2x+4}{-x+1} f\left(\frac{-3x+7}{-x+1}\right)-f\left(\frac{-x+7}{-x+3}\right)=$$
$$=\frac{2(3-x)}{(x-1)(x-5)},$$

которое решается групповой подстановкой $x \to \frac{-3x+7}{-x+1}$, примененной дважды. Как обычно, нужно обращать внимание на множество допустимых значений x.

Подобный прием используется для решения уравнений вида

$$s(x) f(g(x))+t(x) f(\varphi(g(x)))+u(x) f(\varphi \circ \varphi(g(x)))=p(x),$$

где φ — образующий элемент циклической группы третьего порядка.

Упражнение

15. Найти функцию $f(x)$, определенную при $x \in \boldsymbol{R} \setminus \{1; 3\}$ и удовлетворяющую уравнению

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+f\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)+(2-x) f(-2x+5)=\frac{x^2-2}{x-1}.$$

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА К РЕШЕНИЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении уравнений Коши существенно использовались основные понятия математического анализа такие, как предел последовательности и функций, непрерывность, дифференцируемость и др. Рассмотрим некоторые общие методы решения важнейших классов функциональных уравнений, основанные на этих понятиях.

1. Предельный переход

Задача 1. Решить в классе непрерывных функций уравнение

$$3f(2x+1)=f(x)+5x, \tag{1}$$

где $x \in R$.

Заменив x на $\frac{x-1}{2}$, получим

$$f(x) = \frac{1}{3} f\left(\frac{x-1}{2}\right) + \frac{5}{3} \cdot \frac{x-1}{2}. \tag{2}$$

Используя ту же замену, из уравнения (2) последовательно получим

$$\frac{1}{3} f\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{9} f\left(\frac{x-3}{4}\right) + \frac{5}{9} \cdot \frac{x-3}{4},$$

$$\frac{1}{9} f\left(\frac{x-3}{4}\right) = \frac{1}{27} f\left(\frac{x-7}{8}\right) + \frac{5}{27} \cdot \frac{x-7}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\frac{1}{3^n} f\left(\frac{x-2^n+1}{2^n}\right) = \frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{5}{3^{n+1}} \cdot \frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}. \tag{3}$$

Сложив все уравнения, начиная с (2), получим

$$f(x) = \frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right) + \frac{5}{3} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{5}{9} \cdot \frac{x-3}{4} + \cdots + \frac{5}{3^{n+1}} \cdot \frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}. \tag{4}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, то при любом фиксированном x

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x+1}{2^{n+1}} - 1\right) =$$

$$= f\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x+1}{2^{n+1}} - 1\right)\right) = f(-1) \text{ (теорема 2 приложения).}$$

Здесь $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+1}{2^{n+1}} = 0$. Из (1) легко заметить, что $f(-1) = -\frac{5}{2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} f\left(\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right) = 0.$$

Левая часть равенства (4) не зависит от n, поэтому существует ее предел при $n \to \infty$. Переходя к пределу в равенстве (4), при $n \to \infty$ имеем

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2} + \frac{5}{9}\cdot\frac{x-3}{4} + \cdots + \frac{5}{3^{n+1}}\cdot\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}\right). \tag{5}$$

Правая часть (5) является суммой трех бесконечно убывающих прогрессий

$$\frac{5}{6}x + \frac{5}{36}x + \cdots + \frac{5}{6^{n+1}}x + \cdots = x,$$

$$-\frac{5}{3} - \frac{5}{9} - \cdots - \frac{5}{3^{n+1}} - \cdots = -\frac{5}{2},$$

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{5}{6^{n+1}} + \cdots = 1.$$

Итак, $f(x) = x - \frac{3}{2}$, что и подтверждается проверкой.

Упражнение

1. Доказать справедливость формулы (3).

Проанализируем решение задачи 1. Для уравнения (1) применена подстановка, которая перевела выражение, стоящее под знаком неизвестной функции f в одном члене уравнения, в выражение, стоящее под знаком f в другом члене. Эта подстановка была повторена n раз. Получили систему n линейных уравнений. Исключая последовательно неизвестные, получим уравнение вида

$$f(x) = a_n f(b_n(x)) + c_n(x),$$

где a_n, $b_n(x)$, $c_n(x)$ — члены некоторых последовательностей, n — фиксированное натуральное число.

В нашем случае $a_n = \frac{1}{3^{n+1}}$, $b_n(x) = \frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$, $c_n(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{x-1}{2} + \cdots + \frac{5}{3^{n+1}}\cdot\frac{x-2^{n+1}+1}{2^{n+1}}$.

Если существуют пределы при $n \to \infty$ последовательностей (a_n), $(b_n(x))$, $(c_n(x))$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n(x)$ является константой, то предельным переходом, используя непрерывность $f(x)$, находим выражение для $f(x)$. Как обычно, проверка является составной частью решения.

Аналогично задаче 1 могут быть решены в классе непрерывных функций уравнения вида

$$f(kx+b)=mf(x)+P(x),$$

$$f(kx+b)=f(x)\cdot a^{P(x)},$$

где $k>1$, $|m|<1$, $P(x)$ — многочлен, $a>0$.

Задача 2. Найти все непрерывные функции, определенные на множестве действительных чисел, удовлетворяющие уравнению

$$f(x^2)+f(x)=x^2+x.$$

Обозначив $f(x)-x$ через $g(x)$, получим

$$g(x^2)=-g(x). \qquad (6)$$

Пусть $x>0$. Выполним в уравнении (6) n раз замену $x\to\sqrt{x}$. Тогда

$$g(x)=-g(\sqrt{x}),$$

$$-g(\sqrt{x})=g(\sqrt[4]{x}),$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(-1)^{n-1}g(\sqrt[2^{n-1}]{x})=(-1)^n g(\sqrt[2^n]{x}).$$

Складывая уравнения, получим

$$g(x)=(-1)^n g(\sqrt[2^n]{x}).$$

Чтобы избавиться от «неудобного» множителя $(-1)^n$, произведем замену $x\to\sqrt[2^n]{x}$:

$$g(x)=(-1)^n g(\sqrt[2^n]{x})=g(\sqrt[4^n]{x}). \qquad (7)$$

При любом $x>0$, используя непрерывность функций $\ln x$ и e^x, получим

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[4^n]{x}=e^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4^n]{x}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[4^n]{x}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x}{4^n}}=e^0=1.$$

В силу непрерывности $g(x)$, предельным переходом из (7) получим

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g(\sqrt[4^n]{x})=g(\lim_{n\to\infty}\sqrt[4^n]{x})=g(1).$$

Из (6) легко получить $g(1)=g(0)=0$, т. е. при $x\geqslant 0$ $g(x)=0$. Функция $g(x)$ — четна. Действительно,

$$g(-x)=-g((-x)^2)=-g(x^2)=g(x).$$

Поэтому $g(x)=0$ и при $x<0$. Итак, условию задачи удовлетворяет единственная функция $f(x)=x$.

Задача 3. Решить функциональное уравнение

$$f(2x+\ )+\frac{1}{9}f\left(\frac{x-1}{2}\right)=\frac{1}{3}f(x)+x,\quad x\in \boldsymbol{R}, \tag{8}$$

в классе непрерывных функций.

Выполнив замену $x\to\frac{x-1}{2}$, получим

$$f(x)+\frac{1}{9}f\left(\frac{x-3}{4}\right)=\frac{1}{3}f\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{x-1}{2}. \tag{9}$$

Складывая (8) с уравнением (9), умноженным на $\frac{1}{3}$, получим

$$f(2x+1)+\frac{1}{27}f\left(\frac{x-3}{4}\right)=\frac{7x-1}{6}.$$

Это уравнение решается аналогично уравнению (1). Найдем подстановку, переводящую $2x+1$ в $\frac{x-3}{4}$. Для этого положим $2x+1=\frac{t-3}{4}$. Отсюда $x=\frac{t-7}{8}$. Выполнив n раз подстановку $x\to\frac{x-7}{8}$, получим систему уравнений, из которой находим

$$f(2x+1)+(-1)^n\frac{1}{3^{3(n+1)}}f\left(\frac{x-2^{3n+2}+1}{2^{3n+2}}\right)=$$

$$=\frac{7x-1}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{7x+7-2^{3(n+1)}}{6^{3n+1}}.$$

Отсюда при $n\to\infty$

$$f(2x+1)=\frac{36x}{31}-\frac{27}{217},\ \text{или}\ f(x)=\frac{18}{31}x-\frac{153}{217},$$

что и подтверждается проверкой.

В уравнении (8) три слагаемые содержат неизвестную функцию. Подобным образом решается уравнение вида

$$f(kx+b)+\frac{1}{m^2}f\left(\frac{x-b}{k}\right)=\frac{1}{m}f(x)+P(x),$$

где $k>1$, $m\geqslant 1$, $P(x)$ — многочлен.

Упражнения

2. Решить в классе непрерывных функций следующие уравнения:

а) $f(x)=f\left(\frac{x}{5}\right)\cdot a^x$; в) $f(x)=\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}\right)+x$;

б) $f(2x+1)=f(x)$; г) $f(3x)+\frac{1}{4}f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)+1$.

3. Найти непрерывную функцию, график которой обладает следующим свойством: сумма ординаты и абсциссы любой точки A графика равна удвоенной ординате точки, абсцисса которой вдвое больше абсциссы точки A.

2. Дифференцирование

В некоторых случаях для нахождения решения функционального уравнения целесообразно продифференцировать обе части уравнения, если, конечно, производная существует. В результате получим функциональное уравнение, которое содержит и производную неизвестной функции. Решим это уравнение относительно производной. Тогда неизвестная функция является одной из первообразных для найденной производной. Этот метод уже применялся при решении уравнения Коши в классе дифференцируемых функций.

Задача 4. Найти в классе функций, имеющих непрерывные производные, решение уравнения

$$f(3x+2)=3f(x), \quad x\in \boldsymbol{R}. \tag{10}$$

Попытки решить уравнение методом предельного перехода не приводят к желаемому результату. Левая и правая части (10) являются функциями от x. Они равны, следовательно, равны их производные по x. Продифференцируем (10) и после сокращения получим

$$f'(3x+2)=f'(x).$$

Это уравнение уже можно решить методом предельного перехода. Выполнив подстановку $x\to\frac{x-2}{3}$, получим цепочку равенств

$$f'(x)=f'\left(\frac{x-2}{3}\right)=f'\left(\frac{x-8}{9}\right)= \cdots =f'\left(\frac{x-3^n+1}{3^n}\right).$$

Ввиду непрерывности $f'(x)$, при $n\to\infty$, имеем

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}f'\left(\frac{x-3^n+1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}f'\left(\frac{x+1}{3^n}-1\right)=f'(-1).$$

Итак, $f'(x)=k$, где $k=f'(-1)$. Первообразная функция $f(x)=kx+b$. Подставив в (10) $x=-1$, получим $f(-1)=0$. Кроме того $f(-1)=-k+b$, т. е. $k=b$.

Легко проверить, что $f(x)=k(x+1)$ удовлетворяет условию при произвольном k.

При решении ряда задач к желаемому результату приводит повторное дифференцирование обоих функциональных уравнений.

Задача 5. В классе функций, имеющих непрерывные вторые производные, найти решение уравнения

$$f(5x+1)=25f(x), \quad x\in \boldsymbol{R}. \tag{11}$$

Предполагая, что уравнение (11) имеет решение, дважды продифференцируем обе его части. Имеем

$$f'(5x+1)=5f'(x), \tag{12}$$

$$f''(5x+1)=f''(x). \tag{13}$$

Заменяя последовательно n раз $x\to\frac{x-1}{5}$, получим из равенства (13)

$$f''(x)=f''\left(\frac{x-1}{5}\right)=f''\left(\frac{x-6}{25}\right)=\ \cdots\ =f\left(\frac{x-\frac{5^n-1}{4}}{5^n}\right).$$

При $n\to\infty$ имеем

$$f''(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-\frac{5^n-1}{4}}{5^n}\right)=f''\left(-\frac{1}{4}\right)=a.$$

Первообразная функция $f'(x)=ax+b$. Подставляя в (12) $x=-\frac{1}{4}$, получим $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=0$. Кроме того, $f'\left(-\frac{1}{4}\right)=$ $=a\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+b$, т. е. $a=4b$, $f'(x)=b(4x+1)$. Рассуждая аналогично, получим

$$f(x)=\frac{1}{4}b(4x+1)^2+c, \quad f\left(-\frac{1}{4}\right)=0=c,$$

$$f(x)=\frac{1}{4}b(4x+1)^2.$$

Легко проверить, что если $f(x)$ является решением уравнения (11), то и $kf(x)$ удовлетворяет этому уравнению при любой константе k. Таким образом, решением задачи являются функции $f(x)=k(4x+1)^2$ и только они.

Рассмотрим задачу, где производную существующей функции находят, исходя из определения.

Задача 6. Найти функции, определенные при $x>0$, имеющие производные и удовлетворяющие уравнению

$$f(xy)=f(x)f(y). \tag{14}$$

Очевидно, $f(x)\equiv 0$ является одним из решений задачи. В дальнейшем исключим этот тривиальный случай.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет (14) и $f(a)\neq 0$ при некотором a.

Тогда из (14) при $y = \frac{a}{x}$ получим

$$f(x) \cdot f\left(\frac{a}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{a}{x}\right) = f(a) \neq 0.$$

Следовательно, $f(x) \neq 0$ при всех $x > 0$. Кроме того, $f(x)$ строго положительна, так как $f(x) = (f(\sqrt{x}))^2$. По условию $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ существует при всех $x > 0$. Воспользовавшись тем, что $f(x)$ удовлетворяет (14), получим

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x)}{x} \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - 1}{\frac{h}{x}}.$$

При $h \to 0$ и любом фиксированном x дробь $\frac{h}{x}$ стремится к 0.

Так как $f'(x)$ существует, то существует и $\lim\limits_{\frac{h}{x} \to 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - 1}{\frac{h}{x}}$, который не зависит от x. Обозначим его через c. Тогда

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{c}{x}. \tag{15}$$

Замечая, что $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$, найдем первообразные функции обеих частей (15)

$$\ln f(x) = c \ln x + b. \tag{16}$$

При $y = 1$ из (14) получим $f(x) \equiv 0$ или $f(1) = 1$. Последнее условие из (16) дает $b = 0$. Окончательно, $f(x) \equiv 0$ или же $f(x) = x^c$ при произвольном c.

Задача 7. Найти дифференцируемые функции $f(x)$, переводящие произвольную арифметическую прогрессию a, b, c в арифметическую прогрессию $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$.

Пусть $a = x$, y — разность прогрессии. Тогда $b = x + y$, $c = x + 2y$. Для того чтобы $f(x)$, $f(x + y)$, $f(x + 2y)$ составляли арифметическую прогрессию, необходимо и достаточно, чтобы для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$

$$f(x) + f(x + 2y) = 2f(x + y). \tag{17}$$

Дифференцируя обе части (17) по y при фиксированном x, получим

$$f'(x+2y)\cdot 2 = 2f'(x+y) \tag{18}$$

(производная $f(x)$ равна 0 как производная постоянной).

Равенство (18) справедливо для любых $x, y \in \boldsymbol{R}$, так как x можно было зафиксировать произвольно. Положив в (18) $x = -y$, получим

$$f'(y) = f'(0)$$

для всех $y \in \boldsymbol{R}$. Обозначим $f'(0)$ через k.

Таким образом, производная функции $f(x)$ постоянна; $f(x) = kx + l$.

Проверка показывает, что линейные функции $f(x) = kx + l$ при произвольных $k, l \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяют условию задачи.

Упражнения

4. Найти решение функциональных уравнений в классе функций, имеющих производные:

а) $f(f(x)) = f(x) + x$;
б) $f(xy) = f(x) + f(y)$, $D(f) =]0;\ \infty[$.

5. Решить функциональное уравнение

$$f(2x) = 2f(x)$$

в множестве функций типа $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, имеющих непрерывную производную во всякой точке $x \in \boldsymbol{R}$.

6. Что можно сказать о дифференцируемой функции $f(x)$, если ее производная — периодическая функция?

7. Решить уравнение

$$f(kx+b) = k^2 f(x), \quad k \neq 0;\ 1,$$

в классе функций, имеющих непрерывные производные II порядка.

8. Найти все дифференцируемые функции $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, для которых $f(1) = 1$ и при любых $x, y \in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$$

3. Метод Коши

Метод, с помощью которого решено уравнение аддитивности в классе непрерывных функций (см. с. 7), является одним из немногих общих методов решения функциональных уравнений. Он может быть успешно применен к решению широкого класса уравнений, в частности,

$$f(x+y) = f(x)\cdot f(y),$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)\cdot f(y),$$

$$f(x+y)=f(y)\cdot f(x)^{1-\ln f(y)},$$
$$f(x+y)=f(x)^{\ln f(y)},$$
$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)\cdot f(y)},$$
$$f(x+y)=\frac{f(x)\cdot f(y)}{f(x)+f(y)}$$

и др. Этот метод часто называют *методом Коши*. Он применим для нахождения непрерывных решений функциональных уравнений. Сущность его заключается в следующем. Решение с помощью специально подобранных подстановок ищется последовательно для натуральных, рациональных значений аргумента x, затем предельным переходом — для положительных действительных x и, наконец, распространяется на все действительные значения аргумента.

Задача 8. Найти все непрерывные функции, для которых

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+f(x)f(y). \tag{19}$$

Предположим, что существует непрерывная функция, определенная на всей числовой прямой, удовлетворяющая (19). Заменяя y последовательно на x, $2x$, $3x$, ... получим:

$$f(2x)=2f(x)+f^2(x)=(f(x)+1)^2-1,$$
$$f(3x)=3f(x)+3f^2(x)+f^3(x)=(f(x)+1)^3-1,$$
$$f(4x)=(f(x)+1)^4-1,$$

. . . .

Методом математической индукции убедимся в том, что

$$f(nx)=(f(x)+1)^n-1 \tag{20}$$

для $n\in \boldsymbol{N}$, $x\in \boldsymbol{R}$. Действительно,

$$f((n+1)x)=f(x+nx)=f(x)+f(nx)+f(x)f(nx)=$$
$$=f(x)+(f(x)+1)^n-1+f(x)((f(x)+1)^n-1)=$$
$$=(f(x)+1)^{n+1}-1.$$

Итак, (20) выполняется для всех действительных x и натуральных n. Далее, положив в (20) $x=1$ и обозначив $f(1)=a$, получим

$$f(n)=(a+1)^n-1.$$

Заменяя в (20) x на $\frac{m}{n}$, $m\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$, получим

$$f(m)=\left(f\left(\frac{m}{n}\right)+1\right)^n-1.$$

Кроме того, $f(m) = (a+1)^m - 1$. Отсюда, учитывая, что $1 + f(x) = \left(1 + f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$, имеем

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = (a+1)^{\frac{m}{n}} - 1.$$

Итак, для положительных рациональных x решением (19) является

$$f(x) = (a+1)^x - 1.$$

Пусть теперь x — любое положительное иррациональное число. Из школьного курса математики известно, что существует последовательность положительных рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, сходящихся к нему. Только что было доказано, что

$$f(r_1) = (1+a)^{r_1} - 1,$$
$$f(r_2) = (1+a)^{r_2} - 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(r_n) = (1+a)^{r_n} - 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Последовательность $(f(r_n))$ сходящаяся, так как $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, а $f(x)$ — непрерывна. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{r_n\to x} f(r_n) = f(x).$$

Так как показательная функция $(1+a)^x$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty}((1+a)^{r_n} - 1) = (1+a)^x - 1.$$

Здесь и выше использована теорема 2 приложения. Итак, $f(x) = (1+a)^x - 1$, $x > 0$, $x \in \boldsymbol{R}$. Ввиду того, что область определения $f(x)$ содержит 0 и отрицательные числа, то полагая в (19) $x = 0$, найдем

$$f(y) = f(0) + f(y) + f(0)f(y),$$

т. е. либо $f(y) \equiv -1$, либо $f(0) = 0$.

При $y = -x$, $x > 0$, из (19) получим

$$0 = f(x - x) = f(x) + f(-x) + f(x)f(-x) =$$
$$= (1+a)^x - 1 + f(-x) + ((1+a)^x - 1)f(-x) =$$
$$= (1+a)^x - 1 + f(-x)(1+a)^x.$$

Отсюда

$$f(-x) = \frac{1-(1+a)^x}{(1+a)^x} = (1+a)^{-x} - 1, \quad x > 0.$$

Итак, $f(x) = (1+a)^x - 1$ или $f(x) \equiv -1$. Непосредственной подстановкой убедимся, что эти функции удовлетворяют уравнению (19):

$$-1 = (-1) + (-1) + (-1)(-1)$$

и

$$(1+a)^x - 1 + (1+a)^y - 1 + ((1+a)^x - 1)((1+a)^y - 1) =$$
$$= (1+a)^x + (1+a)^y - 2 + (1+a)^{x+y} - (1+a)^x -$$
$$- (1+a)^y + 1 = (1+a)^{x+y} - 1.$$

Упражнения

9. Решить в классе непрерывных функций следующие функциональные уравнения:

а) $f(x+y) = f(y) \cdot f(x)^{1-\ln f(y)}$, $D(f) = \boldsymbol{R}$;

б) $f(x+y) = \dfrac{f(x)\,f(y)}{f(x)+f(y)}$, $D(f) =]0;\ \infty[$;

в) $f(x+y) = f(x)^{\ln f(y)}$, $D(f) = \boldsymbol{R}$;

г) $f(x+y) = a^{xy} f(x)\,f(y)$, $a > 0$, $D(f) = \boldsymbol{R}$.

10. Решить функциональное уравнение

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

на множестве функций $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, непрерывных в точке $x = 0$.

Основные идеи метода Коши использованы при решении следующей задачи.

Задача 9*. Найти непрерывные функции $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}_+$, переводящие члены арифметической прогрессии

$$x,\ x+y,\ x+2y$$

в соответствующие члены геометрической прогрессии

$$f(x),\ f(x+y),\ f(x+2y).$$

Используя характеристическое свойство геометрической прогрессии, получим функциональное уравнение

$$(f(x+y))^2 = f(x) \cdot f(x+2y).$$

Заменой $x \to x - y$ оно сводится к уравнению Лобачевского (см. введение):

$$(f(x))^2 = f(x-y)\,f(x+y). \tag{21}$$

Применяя подстановку $x \to \frac{x}{2}, y \to \frac{x}{2}$ и обозначая $f(0) = a$, $a \neq 0$, и $f(1) = b$, $b \neq 0$, получим $f(x)\,f(0) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$, откуда

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{af(x)}. \tag{22}$$

При $x = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}$ отсюда последовательно получим:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{af(1)} = \sqrt{ab} = ac^{\frac{1}{2}}, \ c = \frac{b}{a},$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{af\left(\frac{1}{2}\right)} = ac^{\frac{1}{4}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right) = ac^{\frac{1}{2^n}}, \quad n \in N.$$

Покажем, что $f\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = ac^{\frac{2k-1}{2^n}}$ при $k \in N$, $n \in N$. Вначале проведем индукцию по n для правильных дробей вида $\frac{2k-1}{2^n}$ при фиксированном k. Если $n = 1$, то $k = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{af(1)} = \sqrt{ab} = ac^{\frac{1}{2}}$. Предполагая справедливость равенства $f\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = ac^{\frac{2k-1}{2^n}}$, покажем, что оно выполняется для дробей вида $\frac{2k-1}{2^{n+1}}$:

$$f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{af\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)} = \sqrt{aac^{\frac{2k-1}{2^n}}} = ac^{\frac{2k-1}{2^{n+1}}}.$$

Теперь убедимся, что соотношение имеет место при произвольном $k \in N$. При $k = 1$ оно уже доказано. Пусть оно выполняется для правильных дробей вида $\frac{s}{2^n}$, где s — нечетно, $s \leqslant 2k - 1$. Тогда оно имеет место для $\frac{2k+1}{2^n}$.

Действительно, полагая в (21) $x = \frac{k+1}{2^n}$, $y = \frac{k}{2^n}$, получим

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) f\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(f\left(\frac{k+1}{2^n}\right)\right)^2,$$

или

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) ac^{\frac{1}{2^n}} = a^2c^{\frac{2k+2}{2^n}}$$

$\left(\text{если } k+1 \text{ — четное число, то дробь } \frac{k+1}{2^n} \text{ можно сократить}\right)$.

Итак

$$f\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)=ac^{\frac{2k+1}{2^n}}. \tag{23}$$

Пусть теперь x — произвольное действительное число из промежутка [0; 1]. Оно представимо в виде бесконечной десятичной дроби

$$x=0,\ a_1a_2\ \ldots\ a_n\ \ldots=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots,$$

где $a_i=0, 1, \ldots, 9$ ($i=1, 2, \ldots, n, \ldots$).

Аналогично действительное число $x\in[0;\ 1]$ можно записать в виде

$$x=\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\cdots+\frac{p_n}{2^n}+\cdots,$$

где $p_i=0;\ 1$ ($i=1, 2, \ldots, n, \ldots$). Эту запись называют разложением x в двоичную дробь. Число x является пределом последовательности ее «двоичных приближений»:

$$x_1=\frac{p_1}{2},\ x_2=\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2},\ \ldots,\ x_n=$$

$$=\frac{p_1}{2}+\frac{p_2}{2^2}+\cdots+\frac{p_n}{2^n},\ \ldots.$$

Легко заметить, что x_n можно представить в виде

$$x_n=\frac{s}{2^n},\quad s\leqslant 2^n.$$

Используя непрерывность функций $f(x)$ и c^x, переходя к пределу в обеих частях (23), получим

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{s}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{s}{2^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}ac^{\frac{s}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}ac^{x_n}=ac^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=ac^x,$$

т. е.

$$f(x)=ac^x,\quad x\in[0;\ 1]. \tag{24}$$

Пусть теперь $x\in[1;\ \infty[$. Очевидно, найдется такое n, что $\frac{x}{2^n}\in[0;\ 1]$. Из (22) последовательно имеем

$$\left(f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right)^2=af\left(\frac{x}{2^n}\right)=a^{\frac{3}{2}}f^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)=\cdots$$

$$\ldots=a^{\frac{2^{n+1}-1}{2^n}}f^{\frac{1}{2n}}(x).$$

Отсюда, используя (24),

$$a^2 c^{\frac{x}{2^n}} = a^{2-\frac{1}{2^n}} f^{\frac{}{2^n}}(x),$$

или, возводя обе части в степень 2^n, получим для всех $x \geqslant 0$

$$f(x) = ac^x.$$

Положив в (21) $x = 0$, получим для $y > 0$

$$f(y) f(-y) = (f(0))^2 = a^2, \ f(-y) = \frac{a^2}{f(y)} = \frac{a^2}{ac^y} = ac^{-y}.$$

Таким образом, если существуют функции, удовлетворяющие условию задачи, то они имеют вид $f(x) = ac^x$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Подставляя найденные функции в (21), увидим, что они в самом деле удовлетворяют уравнению при произвольной константе a.

Упражнения

11. Решить уравнение (21) в классе непрерывных положительных функций путем приведения к одному из уравнений Коши.

12. Найти непрерывные функции, обладающие следующим свойством: для любых двух точек значение от среднего арифметического этих точек равно среднему арифметическому значений функции в каждой точке.

Соответствующее функциональное уравнение рекомендуем решить двумя способами: приведением к уравнению аддитивности и методом, использованным при решении задачи 9.

13. Решить в классе непрерывных функций уравнение

$$f(x+y) = f(x) f(y) - \sqrt{1-(f(x))^2} \cdot \sqrt{1-(f(y))^2}, \ D(f) = \boldsymbol{R}.$$

4*. Цикличность и непрерывность

В предыдущих параграфах неоднократно рассматривались решения функциональных уравнений вида

$$f^n(x) = x \tag{25}$$

таких, что $f^k(x) \neq x$ при $k < n$. Как следует из § 4, эти решения являются образующими элементами циклических групп n-го порядка.

Так, функции $\frac{1}{x}$; $\sqrt{1-x^2}$, $x \in [0;\ 1]$; $a - x$ являются образующими элементами циклических групп второго порядка. Функции $\frac{1}{2-4x}$, $x \neq 0$; $\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}$, $x \neq 1$, порождают циклические группы третьего порядка. Циклическая группа с образующим элементом $\frac{x-1}{x+1}$, $x \neq 0$; 1, имеет четвертый порядок. В § 4 указаны решения уравнения (25) при любом $n \in \boldsymbol{N}$.

Конечно, обращает внимание на себя то, что среди приведенных решений при $n \geqslant 3$ нет ни одной непрерывной функции. Оказывается, бесполезно искать непрерывные решения уравнения (25) для $n \geqslant 3$.

Докажем это утверждение.

Пусть $g(x)$ — непрерывная на некотором промежутке A функция, $g: A \to A$, $g^m(x) = x$. Тогда из равенства $g(x) = g(y)$ вытекает $x = g^m(x) = g^m(y) = y$, т. е. для произвольных $x, y \in A$ из $x \neq y$ следует $g(x) \neq g(y)$. Поэтому функция $g(x)$ является либо строго возрастающей, либо строго убывающей на A (см. приложение, теорема 5). Если $g(x)$ — возрастающая, то, предполагая, что $g(x_0) > x_0$, $x_0 \in A$, получим $x_0 < g(x_0) < g^2(x_0) < \ldots < g^{m-1}(x_0) < g^m(x_0) = x_0$, что невозможно.

Аналогичный результат имеет место, если найдется такая точка $x_1 \in A$, что $g(x_1) < x_1$. Итак, $g(x) = x$ для всех $x \in A$, а тождественная функция x порождает циклическую группу первого порядка.

Пусть теперь $g(x)$ — убывающая на A функция, тогда из неравенства $x < y$ вытекает $g(x) > g(y)$, $g^2(x) < g^2(y)$, т. е. функция $h(x) = g^2(x) = g(g(x))$ является возрастающей. Для этой функции $h^m = (g^2)^m = (g^m)^2 = x \circ x = x$.

Выше было доказано, что если $g^m(x) = x$ и $g(x)$ — строго возрастающая функция, то $g(x) = x$. Поэтому $h(x) = g^2(x) = x$, $g(x)$ — образующий элемент циклической группы второго порядка.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Аксиоматическое определение элементарных функций

В предыдущих параграфах решен целый ряд функциональных уравнений. Часто решением уравнения являлась вполне определенная функция. Например, единственным решением уравнения

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1, \quad D(f) = R \setminus \{0\} \tag{1}$$

является функция $\frac{1}{x}$. Возникает мысль определить обратную пропорциональную зависимость как решение функционального уравнения (1). По существу, уравнение (1) является характеристическим свойством функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Идея указания набора характеристических свойств, полностью определяющих функции, составляет содержание аксиоматического метода определения функций. Так, для показательной функции $f(x) = e^x$ совокупность характеристических свойств состоит из функционального уравнения

$$f(x+y) = f(x)f(y), \tag{2}$$

условия монотонности при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и равенства $f(1) = e$.

В самом деле, как было показано (см. с. 16), монотонными решениями (2) являются функции $f(x) \equiv 0$, $f(x) = a^x$ $(a > 0)$. Ввиду условия $f(1) = e$, обеспечивающего единственность решения (2), получим $f(x) = e^x$.

Характеристические свойства, полностью определяющие функции, принято называть *аксиомами*. В системе аксиом, принимаемых в качестве определения функций, важнейшей аксиомой является функциональное уравнение. При этом существование его решения постулируется, а основным содержанием аксиоматического метода определения функции является доказательство единственности этого решения, а также исследование свойств определяемой функции.

В качестве примера приведем аксиоматическое определение одной из тригонометрических функций.

В средней школе тригонометрические функции изучаются на основе их геометрического определения. Приводимое ниже определение функции $\cos x$ строится чисто аналитическими средствами, независимо от геометрии. Для определяемой функции будем употреблять термин «аналитический косинус». В дальнейшем установим эквивалентность аналитического косинуса и функции $\cos x$, определяемой геометрически.

Определение. *Аналитическим косинусом называется функция:*

а) *непрерывная при всех действительных x;*

б) *удовлетворяющая функциональному уравнению*

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y); \tag{3}$$

в) *принимающая в точке нуль положительное значение;*

г) *обращающаяся в нуль при некотором положительном значении $x = c$ таком, что $f(x) \neq 0$ при $0 < x < c$.*

Из этой системы аксиом можно вывести целый ряд свойств аналитического косинуса.

Свойство 1. $f(0) = 1$.

Положив в (3) $x = y = 0$, получим $f(0) = f^2(0)$, и так как $f(0) > 0$, то $f(0) = 1$.

Свойство 2. $f(x)$ — *четная функция.*

Это следует из (3) при $x = 0$ с учетом свойства 1.

Свойство 3. *Функция $f(x)$ периодическая с наименьшим положительным периодом $4c$.*

Прежде всего покажем, что

$$f(2c+x) = -f(x). \tag{4}$$

Действительно,

$$f(2c+x)+f(x) = f((c+x)+c) + \\ + f((c+x)-c) = 2f(c+x)f(c) = 0.$$

Отсюда, в частности, имеем

$$f(2c) = -f(0) = -1. \tag{5}$$

Далее, число $4c$ является периодом $f(x)$, так как

$$f(4c+x) = f(2c+(2c+x)) = -f(2c+x) = f(x).$$

Предположим, что положительное число l, меньшее $4c$, является периодом $f(x)$. Тогда $f(l) = f(0+l) = f(0) = 1$. Из (3) при $x = y = \frac{l}{2}$ получим $f(l)+f(0) = 2f^2\left(\frac{l}{2}\right)$, откуда $f^2\left(\frac{l}{2}\right) = 1$, $f\left(\frac{l}{2}\right) = \pm 1$.

Допустим вначале, что $f\left(\frac{l}{2}\right) = 1$, тогда, в силу (5), $f(2c) + f\left(\frac{l}{2}\right) = 0$. Из уравнения (3) при $x = c + \frac{l}{4}$ и $y = c - \frac{l}{4}$, последовательно применяя (4) и свойство 2, имеем

$$f(2c)+f\left(\frac{l}{2}\right) = 2f\left(c+\frac{l}{4}\right)f\left(c-\frac{l}{4}\right) = \\ = 2f\left(2c-\left(c-\frac{l}{4}\right)\right)f\left(c-\frac{l}{4}\right) = \\ = -2f\left(-\left(c-\frac{l}{4}\right)\right)f\left(c-\frac{l}{4}\right) = -2\left(f\left(c-\frac{l}{4}\right)\right)^2.$$

Следовательно, $f\left(c-\frac{l}{4}\right) = 0$ при $0 < c - \frac{l}{4} < c$, что противоречит аксиоме г).

Если же $f\left(\frac{l}{2}\right) = -1$, то, полагая в (3) $x = y = \frac{l}{4}$, находим $f\left(\frac{l}{2}\right) + f(0) = 2f^2\left(\frac{l}{4}\right)$, откуда $f\left(\frac{l}{4}\right) = 0$, что снова противоречит г).

С в о й с т в о 4. *Функция $f(x)$ ограничена, $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.*

Допустим, что при некотором $x = a$ $|f(a)| > 1$, тогда из (3) при $x = c + a$, $y = c - a$ получим

$$2f(c+a)f(c-a) = f(2c)+f(2a) = -1+f(2a).$$

Но $f(2a) = f(a+a) + f(a-a) - 1 = 2f^2(a) - 1$. Поэтому $f(c+a)f(c-a) = f^2(a) - 1 > 0$. Кроме того, в силу (3) и (4),

$$f(c-a)f(c+a) = f(2c-(c+a))f(c+a) = -(f(c+a))^2 \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает свойство 4.

Свойство 5. *Функция $f(x)$ положительна в промежутке* $[0;\ c[$.

Это свойство вытекает из того, что $f(0) > 0$, $f(x) \neq 0$ в промежутке $[0;\ c[$, и следующей теоремы математического анализа, принадлежащей Коши.

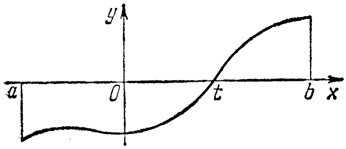

Рис. 7

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $[a;\ b]$ и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b найдется точка t, в которой функция обращается в нуль.

Доказательство теоремы приведено в приложении. Она имеет очень простой геометрический смысл. График непрерывной функции состоит из одного куска; одна из его точек лежит ниже оси абсцисс, а другая выше, и поэтому на графике должна быть точка, где он пересекает эту ось (рис. 7).

Конечно, нужно иметь в виду, что геометрическая интуиция не заменяет доказательства.

В силу аксиомы г) число c — наименьшее положительное значение, при котором $f(x) = 0$. Если предположить, что $f(u) < 0$, $0 < u < c$, то в силу теоремы Коши на интервале $]0;\ u[$ нашлась бы точка t $(0 < t < c)$ такая, что $f(t) = 0$.

Упражнения

1. Доказать, что для аналитического косинуса $f(x)$ имеет место формула деления аргумента пополам:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+f(x)}{2}}.$$

2. Доказать, что если $f(x)$ — аналитический косинус, то

$$f(c-x) = \pm\sqrt{1-f^2(x)}.$$

Установлено ряд свойств аналитического косинуса как следствия аксиом а) — г). Следующее свойство доказывает, что различные способы задания функции $\cos x$ равносильны, поскольку они не могут привести к различным функциям, обладающим данными характеристическими свойствами.

Свойство 6. *Не существует двух различных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, удовлетворяющих при данном c условиям* а) — г).

При доказательстве свойства используется метод решения задачи 9, § 6.

Предположим, что существуют функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, $f_1(x) \not\equiv f_2(x)$, удовлетворяющие аксиомы а) — г) при данном c. Покажем, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ совпадают хотя бы при одном значении $x = \alpha$, отличном от нуля, то они совпадают при всех значениях x. Этого достаточно для доказательства свойства, так как $f_1(2c) = f_2(2c) = -1$ в силу (5).

Из (3) при $x = y = \alpha$ для каждой из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеем

$$f_1(2\alpha) = 2f_1^2(\alpha) - 1; \quad f_2(2\alpha) = 2f_2^2(\alpha) - 1.$$

Но так как $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, то $f_1(2\alpha) = f_2(2\alpha)$.

Методом математической индукции легко показать, что

$$f_1(n\alpha) = f_2(n\alpha) \tag{6}$$

при всех $n \in N$. После подстановки в (3) $x = y = \frac{\alpha}{2}$ получим

$$f_i(\alpha) + f_i(0) = 2f_i^2\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad i = 1,\ 2,$$

откуда $f_1^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f_2^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Можно считать, что $0 < \alpha < 2c$, так что $f_i\left(\frac{\alpha}{2}\right) \geqslant 0$, $i = 1,\ 2$, поэтому

$$f_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f_2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Итак, если $0 < l \leqslant 2c$, $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$, то

$$f_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) = f_2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Применяя это утверждение m раз, по индукции получим

$$f_1\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) = f_2\left(\frac{\alpha}{2^m}\right), \quad m \in N.$$

Отсюда, используя (6), получаем

$$f_1\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right) = f_2\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right), \tag{7}$$

$n \in N$, $m \in N$. Это равенство справедливо и при $n = 0$, так как $f_1(0) = f_2(0) = 1$.

Далее, в силу четности $f_1(x)$ и $f_2(x)$

$$f_1\left(-\frac{n\alpha}{2^m}\right) = f_1\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right) = f_2\left(\frac{n\alpha}{2^m}\right) = f_2\left(-\frac{n\alpha}{2^m}\right).$$

Таким образом, равенство (7) выполняется для всех $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пусть теперь x — произвольное действительное число, α — отличное от 0 число, для которого $f_1(\alpha) = f_2(\alpha)$. Разложим $\frac{x}{\alpha}$ в бесконечную двоичную дробь и составим последовательность $\frac{n_1}{2^{m_1}}, \frac{n_2}{2^{m_2}}, \ldots, \frac{n_k}{2^{m_k}}$ ее двоичных приближений; $\frac{x}{\alpha} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{n_k}{2^{m_k}}$.

В силу (7)

$$f_1\left(\frac{n_k}{2^{m_k}}\alpha\right) = f_2\left(\frac{n_k}{2^{m_k}}\alpha\right), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Так как $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные функции, то

$$\lim_{k\to\infty} f_i\left(\frac{n_k}{2^{m_k}}\alpha\right) = f_i\left(\frac{x}{\alpha}\alpha\right) = f_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Переходя к пределу в (8), находим

$$f_1(x) = f_2(x).$$

Свойство доказано.

Нетрудно проверить, что функция $\cos x$, определяемая в школе геометрически, удовлетворяет аксиомам аналитического косинуса при $c = \frac{\pi}{2}$. Действительно,

а) $\cos x$ непрерывен при всех $x \in \boldsymbol{R}$;

б) соотношение (3) вытекает из теоремы сложения;

в) $\cos 0 = 1 > 0$;

г) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos x \neq 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

На основании свойства 6 заключаем, что при $c = \frac{\pi}{2}$ аналитический косинус совпадает с геометрическим. Заметим, что при произвольном $c > 0$ аналитический косинус совпадает с функцией $\cos\left(\frac{\pi}{2c}x\right)$.

2. Закон сложения сил

Из курса физики известно, что силы складываются по правилу параллелограмма. Открытие этого правила связано с именем Леонардо да Винчи.

Правило параллелограмма и сейчас выступает в качестве одной из аксиом статики — раздела механики, изучающего условия равновесия материальных тел под действием сил.

Приведем основные аксиомы статики.

1. *Точку приложения силы можно переносить вдоль линии ее действия.*

2. *Две силы, приложенные к телу в одной точке, можно заменить одной силой (равнодействующей), приложенной в той же точке, причем вектор этой силы равен геометрической сумме векторов данных двух сил.*

3. *Если на тело действуют две силы и оно находится в равновесии, то эти силы имеют общую линию действия, равны по величине и направлены в противоположные стороны.*

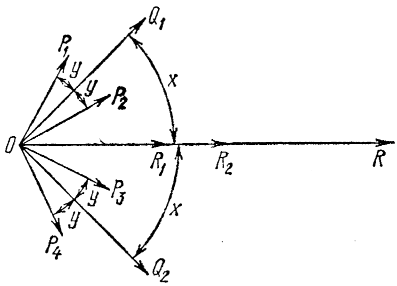

Рис. 8

Вторая аксиома издавна привлекала внимание своей сложностью. Поэтому предпринимались попытки вывести ее из более простых положений. Одновременно выяснился вопрос о существовании другого правила сложения сил, не противоречащего остальным аксиомам.

Изложим схему одного из возможных обоснований закона сложения двух сил (или в геометрической интерпретации, двух векторов), основанного на решении функционального уравнения. Ограничимся рассмотрением равных по величине сил.

Вместо аксиомы 2 будем исходить из следующих более простых утверждений.

A) Две равные по величине силы, приложенные в одной точке, имеют равнодействующую (т. е. сумму), приложенную в той же точке и направленную по биссектрисе угла, образованной данными силами. При этом, если P — величина каждой из сил, R — величина равнодействующей, $2x$ — величина угла между силами, то

$$R = 2Pf(x), \tag{9}$$

где $f(x)$ — некоторая непрерывная функция от величины угла.

B) Сложение сил коммутативно, ассоциативно.

C) Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ — силы, имеющие общую линию действия, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ — величины этих сил. Тогда если $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, то направление $\vec{a} + \vec{b}$ совпадает с направлением $\vec{a}$, причем $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены и $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют противоположное направление. Если же $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то $\vec{a} + \vec{b} = 0$; $|\vec{a} + \vec{b}| = 2|\vec{a}|$ при одинаково направленных $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пусть к точке O приложены четыре равные по величине силы $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, $\overrightarrow{OP_3}$, $\overrightarrow{OP_4}$ (рис. 8). Причем $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_3}| = |\overrightarrow{OP_4}|$, где $|\overrightarrow{OP_i}|$ — величина силы $\overrightarrow{OP_i}$; $P_1\widehat{O}P_2 = P_3\widehat{O}P_4 = 2y$, $P_2\widehat{O}P_3 = 2(x-y)$. Равнодействующая $\overrightarrow{OQ_1}$ для сил $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ направлена по биссектрисе угла P_1OP_2. Аналогично $\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4}$.

В силу (9), $|\overrightarrow{OQ_1}| = |\overrightarrow{OQ_2}| = 2Pf(y)$. Заметим, что $Q_1\widehat{O}Q_2 = 2x$. Тогда

$$|\overrightarrow{OR}| = |\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}| = 2|\overrightarrow{OQ_1}|f(x) = 4Pf(y)f(x).$$

Используя коммутативность и ассоциативность сложения сил, имеем

$$|\overrightarrow{OR}| = |\overrightarrow{OQ_1} + \overrightarrow{OQ_2}| = |(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}) + (\overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4})| =$$
$$= |(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_4}) + (\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3})|.$$

Силы $\overrightarrow{OR_1} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_4}$ и $\overrightarrow{OR_2} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3}$ имеют общую линию действия — прямую, на которой лежат биссектрисы углов P_1OP_4 и P_2OP_3. Поэтому

$$|\overrightarrow{OR_1} + \overrightarrow{OR_2}| = |\overrightarrow{OR_1}| + |\overrightarrow{OR_2}| = 2Pf(x+y) + 2Pf(x-y).$$

Приравнивая полученные выражения для $|\overrightarrow{OR}|$ и сокращая на $2P$, имеем

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Получили функциональное уравнение, которое фигурирует в определении аналитического косинуса. Нетрудно проверить, что выполняются и остальные аксиомы этого определения. В самом деле, непрерывность функции $f(x)$ предусмотрена утверждением А). Для ненулевых сил, совпадающих по величине и направлению, равнодействующая равна $2P$ (см. утверждение С)). По формуле (9) $R = 2Pf(0)$. Отсюда $f(0) = 1 > 0$.

Наконец, в силу аксиомы статики 3 и утверждения С) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ и $f(x) \neq 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Отсюда заключаем, что $f(x) = \cos x$. Таким образом, формула (9), выражающая закон сложения двух равных по величине сил, составляющих между собой угол $2x$, принимает вид

$$R = 2P\cos x. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что четырехугольник $OABC$, образованный двумя приложенными к одной точке силами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ (равными по величине P) и отрезками, соединяющими их концы с концами равнодействующей $\overrightarrow{OB}$, будет ромбом (рис. 9). Таким образом, установлен закон параллелограмма для сложения равных по величине сил.

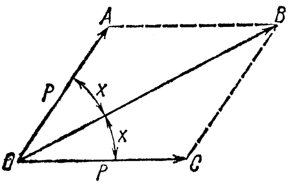

Рис. 9

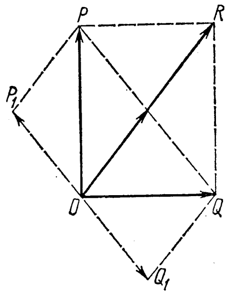

Рис. 10

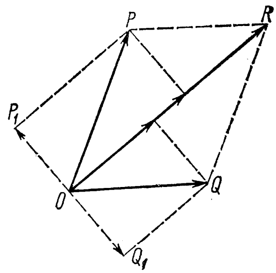

Рис. 11

Предлагаем распространить полученное правило параллелограмма сложения сил на произвольные силы. Целесообразно вначале рассмотреть случай, когда силы $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ перпендикулярны (рис. 10), затем перейти к общему случаю (рис. 11). Необходимые построения приведены на рисунках.

3. Скалярное произведение векторов

Важное место в геометрии занимает понятие скалярного произведения векторов[1]. Известно, что результатом скалярного умножения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является число

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}).$$

Это действие над векторами обладает рядом полезных свойств, из которых выделим следующие:

1) $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}$;

2) $(\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\alpha\vec{b}),\quad \alpha\in\boldsymbol{R}$;

3) скалярное произведение векторов не меняется при повороте пространства на произвольный угол[2].

---

[1] Предполагаем, что векторы выходят из одной точки.

[2] Поворотом пространства относительно оси на данный угол называется операция, которая состоит в повороте каждой точки плоскости, проходящей через эту точку и перпендикулярной оси, на данный угол около точки пересечения этой плоскости с осью.

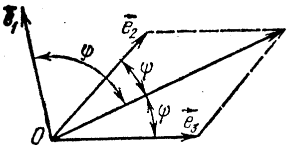

Рис. 12

Возникает вопрос, нельзя ли иначе определить операцию над векторами, результатом которой было бы число и которая удовлетворяла бы свойствам 1) — 3). Оказывается, что с точностью до положительного множителя такая операция определяется однозначно. Доказать это можно с помощью функционального уравнения.

Предположим, что результатом операции над векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является число $(\vec{a}, \vec{b}) \in \boldsymbol{R}$ и операция обладает свойствами 1) — 3). Из свойства 3) вытекает, что $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$. Это можно получить поворотом пространства на угол π вокруг биссектрисы угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Обозначим $\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\vec{e}_b = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ — единичные векторы в направлении ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда, согласно свойству 2),

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot (\vec{e}_a, \vec{e}_b). \tag{11}$$

Из свойства 3) следует, что результат операции $(\vec{a}, \vec{b})$ зависит только от длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и угла $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{e}_a, \vec{e}_b})$.

Предварительно покажем, что если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Действительно, произведя поворот перпендикулярных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вокруг $\vec{b}$ на угол π, получим два вектора $(-\vec{a})$, $\vec{b}$. Тогда из 2) и 3) вытекает

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (-\vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{b}), \quad \text{т. е.} \ (\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Обозначим

$$(\vec{e}_a, \vec{e}_b) = f(\varphi), \tag{12}$$

где $\varphi = (\widehat{\vec{e}_a, \vec{e}_b})$. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — три компланарных единичных вектора, такие что

$$(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) = 2\psi, \quad (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \varphi - \psi$$

$\left(\psi\right.$ — произвольный угол из промежутка $\left.\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ (рис. 12).

Тогда

$$(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) = \varphi + \psi, \quad (\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3}) = \varphi.$$

Используя свойство 1), получим

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) + (\vec{e}_1, \vec{e}_3).$$

Так как $|\vec{e}_2 + \vec{e}_3| = 2\cos\psi$, то в силу (11)

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3) = 1 \cdot 2\cos\psi \cdot \left(\vec{e}_1, \frac{\vec{e}_2 + \vec{e}_3}{|\vec{e}_2 + \vec{e}_3|}\right) = 2\cos\psi \cdot f(\varphi).$$

Кроме того, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = f(\varphi - \psi)$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = f(\varphi + \psi)$. Итак, получили функциональное уравнение

$$2f(\varphi)\cos\psi = f(\varphi + \psi) + f(\varphi - \psi).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$f(\varphi) = k\cos\varphi + l\sin\varphi,$$

где $k = f(0)$, $l = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (см. задачу 4, § 3).

Показано, что если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Учитывая (11) и (12) для этих векторов, имеем

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. $l = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Итак,

$$f(\varphi) = k\cos\varphi, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = k|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi.$$

Пришли к выражению, отличающемуся от обычного скалярного произведения двух векторов лишь произвольным (но фиксированным) множителем k.

Упражнения

3. *Косым* произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ плоскости называется число

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Доказать следующие свойства косого произведения:

1) $\vec{a} * \vec{b} = -(\vec{b} * \vec{a})$;
2) $(\alpha\vec{a}) * \vec{b} = \vec{a} * (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} * \vec{b})$;
3) $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$.

4. Пусть некоторая операция, ставящая каждой паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ плоскости в соответствие число $\vec{a} \otimes \vec{b}$, обладает свойствами 1) — 3) упражнения 3, причем, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ поворотом плоскости переводятся в векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{b}_1$, то

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_1.$$

Доказать, что эта операция с точностью до постоянного множителя совпадает с косым произведением векторов.

§ 8. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Среди функций, изучаемых в средней школе, можно выделить функции, для которых областью определения является множество всех натуральных чисел (их называют бесконечными числовыми последовательностями) или же множество чисел 1, 2, ..., n (конечные последовательности, содержащие n членов). К числу таких функций относятся, например, арифметические и геометрические прогрессии, последовательность кубов натуральных чисел 1^3, 2^3, 3^3, ..., n^3, ..., последовательность $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, ..., $\frac{n}{n+1}$, ... и т. д. Для двух последних функций легко указать формулу общего члена, т. е. задать функции с помощью формул

$$f(n) = n^3, \quad g(n) = \frac{n}{n+1}.$$

Однако прогрессии, да и другие последовательности, зачастую задаются с помощью *рекуррентных соотношений*, т. е. с помощью формулы, которая выражает n-й член последовательности через предыдущие. Например, для арифметической прогрессии $a_n = a_{n-1} + d$, где d — постоянное для данной прогрессии число. Аналогично, $a_n = a_{n-1}q$ для геометрической прогрессии. Рекуррентно задается известная последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... чисел Фибоначчи (здесь $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$). При этом следует указать необходимое количество первых членов последовательности, чтобы иметь возможность воспользоваться рекуррентным соотношением. В арифметической и геометрической прогрессиях достаточно указать первый член, а для последовательности чисел Фибоначчи — два.

При задании последовательности рекуррентным соотношением, естественно, возникает задача об отыскании формулы для n-го члена, т. е. выражения для функции $f(n)$. Фактически речь идет о решении функциональных уравнений, где неизвестные функции определены на множестве натуральных чисел.

Если запишем рекуррентное соотношение для последовательности чисел Фибоначчи в виде $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, получим привычную форму функционального уравнения. Решив его при условии, что $f(1) = f(2) = 1$, найдем формулу общего числа последовательности.

Укажем некоторые приемы решения функциональных уравнений натурального аргумента, имеющие вид рекуррентных соотношений [1].

Один из самых распространенных методов нахождения решений заключается в том, что, вычисляя значение искомой функции от нескольких первых чисел натурального ряда (при этом используется рекуррентное соотношение), пытаются заметить вид искомой функции, а затем убеждаются в справедливости догадки с помощью метода математической индукции. Именно так выводятся формулы для n-го члена арифметической и геометрической прогрессий.

Задача 1. Найти формулу n-го члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением $f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2)$, если $f(1) = 3$, $f(2) = 7$.

Последовательно находим:

$$f(3) = 3f(2) - 2f(1) = 15,$$
$$f(4) = 3f(3) - 2f(2) = 31.$$

Уже можно высказать предположение, что

$$f(n) = 2^{n+1} - 1. \qquad (1)$$

Докажем его справедливость, используя метод математической индукции. Имеем $f(1) = 3 = 2^2 - 1$. Предположим, что $f(k) = 2^{k+1} - 1$ для $k < n$, тогда, согласно рекуррентному соотношению,

$$f(n) = 3f(n-1) - 2f(n-2) = 3(2^n - 1) - 2(2^{n-1} - 1) = 2^{n+1} - 1.$$

Итак, утверждение (1) справедливо для всех натуральных чисел.

Задача 2. Найти $f(n)$, $n \in N$, если

$$n^{f(n)-1} = (n-1)^{f(n-1)}.$$

Уравнение имеет смысл при натуральных $n > 1$, так как $f(0)$ по условию, не определено. Если $n = 2$, то $2^{f(2)-1} = 1^{f(1)}$. Отсюда $f(2) = 1, f(1) = a$, где $a \in R$. Взяв последовательно $n = 3,\ 4,\ 5$, получим:

$$3^{f(3)-1} = 2^{f(2)}; \quad f(3) = \log_3 2 + 1 = \log_3 6;$$

---

[1] Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. Популярные лекции по математике. Вып. 1. М.: Наука, 1975. 48 с.

$$4^{f(4)-1} = 3^{f(3)};\quad 4^{f(4)-1} = 3^{\log_3 6};\quad f(4) = \log_4 6 + 1 = \log_4 24;$$
$$5^{f(5)-1} = 4^{f(4)};\quad 5^{f(5)-1} = 4^{\log_4 24};\quad f(5) = \log_5 120.$$

Естественно высказать предположение, что

$$f(n) = \log_n n!,\quad n > 1.$$

При $n = 2$ имеем $f(2) = 1 = \log_2 2!$. Далее, $(n+1)^{f(n+1)-1} = n^{\log_n n!} = n!$. Отсюда

$$f(n+1) = \log_{n+1} n! + 1 = \log_{n+1}(n+1)!.$$

Итак, решение задачи 2 имеет вид: $f(n) = \log_n n!$ при $n > 1$, $f(1) = a$, где a — произвольное действительное число.

Упражнение

1. Найти $f(n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, если

а) $f(n) = 2f(n-1) - f(n-2)$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$;

б) $f(n) = (\alpha+\beta) f(n-1) - \alpha\beta f(n-2)$, $f(1) = \alpha + \beta$, $f(2) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$.

Приведенный метод нахождения решения функционального уравнения требует умения «угадывать» выражение для функции по нескольким ее значениям. Некоторые типы функциональных уравнений, где неизвестная функция определена на множестве натуральных чисел, можно решить методом, аналогичным рассмотренному в § 6.

Задача 3. Найти функцию $f(n)$, определенную для натуральных значений n и удовлетворяющую условию

$$f(n) = f(n-1) + a^n,\quad a \in \boldsymbol{R}.$$

Для натуральных чисел 2, 3, ..., n имеем

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + a^2,\\ f(3) &= f(2) + a^3,\\ &\dots\dots\dots\\ f(n) &= f(n-1) + a^n. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим $f(n) = k + a^2 + a^3 + \dots + a^n$, где $k = f(1)$. Отсюда

$$f(n) = \begin{cases} k + \dfrac{a^2(a^{n-1}-1)}{a-1}, & \text{если } a \neq 1,\\ k + n - 1, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Проверка показывает, что найденная функция является решением задачи 3 при произвольном $k \in \boldsymbol{R}$.

Использованный в задаче 3 прием применим для решения функциональных уравнений вида

$$af(n) = f(n-1) + g(n),$$

где $n \geqslant 2$, a — некоторое действительное число, $g(n)$ — известная функция.

Упражнения

2. На сколько частей можно разделить поверхность шара плоскостями, проходящими через его центр, при условии, что никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр?

3. Найти функцию $f(n)$, определенную для натуральных $n \geqslant 3$ и удовлетворяющую условиям:

$$f(n) = f(n-1) + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} + n - 2,$$

$$f(3) = 1.$$

(к данному уравнению приводится задача о числе частей, на которые делится выпуклый n-угольник его диагоналями, если никакие три из них не пересекаются в одной точке).

Для последовательности чисел Фибоначчи очень трудно отыскать выражение для $f(n)$ по значениям

$$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2,\ f(4) = 3,\ f(5) = 5,\ f(6) = 8, \ldots,$$

хотя рекуррентное соотношение $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ весьма просто. Неприменим и метод, использованный при решении задачи 3.

Рассмотрим общий метод нахождения функции из рекуррентного соотношения вида

$$f(n) = af(n-1) + bf(n-2), \tag{2}$$

где a и b — постоянные коэффициенты, не равные одновременно 0, $a^2 \geqslant -4b$.

Обозначим через x_1 и x_2 корни квадратного уравнения

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Возможны 2 случая:

1) $x_1 \neq x_2$. Тогда подставим в (2), согласно формулам Виета, $a = x_1 + x_2$, $b = -x_1x_2$. Получим

$$f(n) = (x_1 + x_2) f(n-1) - x_1x_2 f(n-2).$$

Отсюда

$$f(n) - x_2 f(n-1) = x_1 (f(n-1) - x_2 f(n-2)), \tag{3}$$

$$f(n) - x_1 f(n-1) = x_2 (f(n-1) - x_1 f(n-2)). \tag{4}$$

Из равенств (3), (4) видно, что числа

$$c_n = f(n) - x_2 f(n-1), \quad n = 2, 3, \ldots,$$

образуют геометрическую прогрессию со знаменателем x_1, а числа

$$d_n = f(n) - x_1 f(n-1), \quad n = 2,\ 3,\ \ldots,$$

являются членами геометрической прогрессии со знаменателем x_2. Следовательно, $c_n = c_2 x_1^{n-2}$, $d_n = d_2 x_2^{n-2}$. Или

$$f(n) - x_2 f(n-1) = (f(2) - x_2 f(1))\, x_1^{n-2}, \tag{5}$$

$$f(n) - x_1 f(n-1) = (f(2) - x_1 f(1))\, x_2^{n-2}. \tag{6}$$

Решая систему уравнений (5) — (6) относительно неизвестных $f(n)$ и $f(n-1)$, получаем

$$f(n) = \frac{f(2) - x_2 f(1)}{x_1 - x_2}\, x_1^{n-1} - \frac{f(2) - x_1 f(1)}{x_1 - x_2}\, x_2^{n-1}. \tag{7}$$

2) $x_1 = x_2$. Тогда

$$f(n) - x_1 f(n-1) = x_1 (f(n-1) - x_1 f(n-2)),$$

и числа $c_n = f(n) - x_1 f(n-1)$, $n = 2, 3, \ldots$, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем x_1.

Поэтому $f(n) - x_1 f(n-1) = (f(2) - x_1 f(1))\, x_1^{n-2}$ или

$$\frac{f(n)}{x_1^n} - \frac{f(n-1)}{x_1^{n-1}} = \frac{f(2) - x_1 f(1)}{x_1^2}. \tag{8}$$

Равенство (8) показывает, что числа $\dfrac{f(n)}{x_1^n}$, $n = 2,\ 3,\ \ldots,$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\dfrac{f(2) - x_1 f(1)}{x_1^2}$.

Следовательно,

$$\frac{f(n)}{x_1^n} = \frac{f(2)}{x_1^2} + \frac{f(2) - x_1 f(1)}{x_1^2}(n-2),$$

$$\begin{aligned} f(n) &= x_1^{n-2}(f(2) + (f(2) - x_1 f(1))(n-2)) = \\ &= x_1^{n-2} f(2) \cdot (n-1) - x_1^{n-1} f(1)(n-2). \end{aligned} \tag{9}$$

Проверкой нетрудно убедиться, что полученные выражения (7) при $x_1 \neq x_2$ и (9) при $x_1 = x_2$ удовлетворяют условию задачи. Например, обозначив $A = \dfrac{f(2) - x_2 f(1)}{x_1 - x_2}$, $B = \dfrac{f(2) - x_1 f(1)}{x_1 - x_2}$, при подстановке (7) в (2) получим

$$\begin{aligned} &Ax_1^{n-1} - B\ {}_2^{n-1} - aAx_1^{n-2} + aBx_2^{n-2} - bAx_1^{n-3} + bBx_2^{n-3} = \\ &= A(x_1^2 - ax_1 - b)\, x_1^{n-3} - B(x_2^2 - ax_2 - b)\, x_2^{n-3} = 0. \end{aligned}$$

Задача 4. Найти выражение $f(n)$ для n-го числа Фибоначчи.

Имеем

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),\ f(1) = f(2) = 1.$$

Составим уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ (здесь $a = b = 1$). Его корни $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда, согласно формуле (7),

$$f(n) = \frac{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} -$$

$$- \frac{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Упражнения

4. Решить функциональные уравнения ($n \in N$):

а) $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$;
б) $f(n+2) = 4f(n+1) - 4f(n)$;
в) $f(n+2) = f(n)$.

5. Найти выражение для n-го члена последовательности, заданной условиями

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0,\quad a_1 = 10,\ a_2 = 16.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теорема 1. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$— произвольная последовательность значений x, имеющая своим пределом число a. Если соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ значений функции $f(x)$ имеет своим пределом число A, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.*

Доказательство. Предположим, что A не является пределом $f(x)$ при $x \to a$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $\delta > 0$ существует хотя бы одно значение переменной $x = x'$ отличное от a, для которого $|x' - a| < \delta$, но $|f(x') - A| \geqslant \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность положительных чисел (δ_n), стремящуюся к 0. Для каждого $\delta = \delta_n$ найдется такое значение $x' = x_n'$, что $|x_n' - a| < \delta_n$, но $|f(x_n') - A| \geqslant \varepsilon$. Получим последовательность чисел $x_1', x_2', \ldots, x_n', \ldots$, для которой $|x_n' - a| < \delta_n$, $n \in N$. Так как $\delta_n \to 0$, то $x_n' \to a$ (по определению предела последовательности). Соответствующая последовательность значений функции $f(x_1'), f(x_2'), \ldots, f(x_n'), \ldots$ должна стремиться к A. А это невозможно, так как при всех $n \in N$ $|f(x_n') - A| \geqslant \varepsilon$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2 (обратная теореме 1). *Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ значений переменной x, сходящейся к a $(x_n \neq a)$, соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ имеет своим пределом число A.*

Доказательство. Возьмем произвольное число $a > 0$. По определению предела функции $f(x)$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, отличных от a, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется соотношение $|f(x) - A| < \varepsilon$. Так как последовательность (x_n) сходится к a, то для указанного δ найдется такой номер N, что для $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \delta$, а следовательно и $|f(x_n) - A| < \varepsilon$.

Этим и доказана сходимость последовательности $(f(x_n))$ к A.

Теорема 3. *Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a; b]$ и принимающей на концах этого промежутка значения разных знаков, существует точка $c \in]a; b[$, в которой $f(c) = 0$.*

Доказательство. Для определенности положим $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$ (рис. 13). Разделим промежуток $[a; b]$ пополам точкой $\frac{a+b}{2}$. Если $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то теорема доказана: $c = \frac{a+b}{2}$.

Пусть $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$. Тогда на концах одного из полученных промежутков функция принимает значения разных знаков, причем на левом конце отрицательное, а на правом — положительное. Обозначим этот промежуток $[a_1; b_1]$. С ним поступим точно так же. Обозначим через $[a_2; b_2]$ ту из половин промежутка, для которой $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$ и т. д. Получим неубывающую ограниченную последовательность точек $a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots$ $\dots \leqslant a_n \leqslant \dots < b$. Эта последовательность имеет предел $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (см. «Алгебра и начала анализа» 9 кл. п. 32).

Покажем, что $f(c) = 0$. Пусть $f(c) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(c)|$, тогда для любого $\delta > 0$ найдется N такое, что $|c - a_n| < \delta$, но $f(a_N) < 0$. Следовательно, $|f(c) - f(a_N)| > |f(c)| > \varepsilon$, что невозможно, ибо $f(x)$ — непрерывная функция (см. теорему 2).

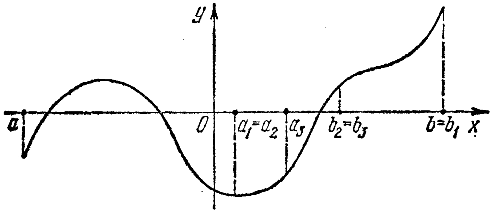

Рис. 13

При $f(c) < 0$ получается аналогичное противоречие из неравенства $|f(c) - f(b_N)| > |f(c)|$.

Теорема 4. *Если функция $g(x)$ непрерывна в некотором промежутке и в двух точках $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ этого промежутка принимает неравные значения $g(a) = A$ и $g(b) = B$, то каково бы ни было число C, лежащее между A и B, найдется такая точка $x = c$ между a и b, что $g(c) = C$* (рис. 14).

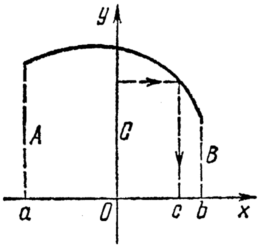

Рис. 14

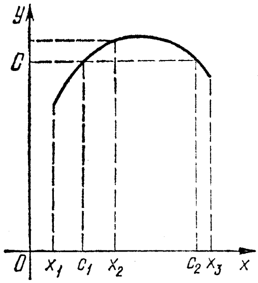

Рис. 15

Действительно, пусть $A > B$, так что $A > C > B$. Функция $f(x) = g(x) - C$ непрерывна на $[a; b]$ и на концах промежутка имеет разные знаки. Согласно теореме 3, существует точка $c \in]a; b[$, для которой $f(c) = 0$ или $g(c) = C$.

Теорема 5. *Если функция $g(x)$ непрерывна на некотором промежутке A и для любых $x, y \in A$ из $x \neq y$ следует $g(x) \neq g(y)$, то $g(x)$ является либо строго возрастающей, либо строго убывающей на A.*

В самом деле, пусть $g(x)$ не является ни строго возрастающей, ни строго убывающей на A. Тогда найдутся три такие точки $x_1 < x_2 < x_3$, что $g(x_1) < g(x_2)$; $g(x_2) > g(x_3)$, либо $g(x_1) > g(x_2)$, $g(x_2) < g(x_3)$. В первом случае для определенности предположим, что $g(x_1) < g(x_3)$ (рис. 15). Тогда, согласно теореме 4, для любого числа C, лежащего между $g(x_2)$ и $g(x_3)$, найдутся такие точки $c_1 \in]x_1; x_2[$ и $c_2 \in]x_2; x_3[$, что $g(c_1) = g(c_2) = C$, а это невозможно.

Аналогично рассматривается второй случай.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1

3. ax, $a \leqslant 0$. 4. ax, $a > 0$. Указание. Доказать монотонность $f(x)$.

7. Указание. $|f(x) - xf(1)| = \frac{1}{10^n}|f(\varepsilon_n) - \varepsilon_n f(1)| \leqslant \frac{1}{10^n} \times$ $\times (M + |f(1)|)$.

8. *Решение.*

$$\int_0^x f(u+y)\,dy = \int_0^x (f(u) + f(y))\,du = \int_0^x f(u)\,du + f(y)\,x.$$

Воспользовавшись формулой Ньютона — Лейбница и правилом замены переменных в интеграле, получим

$$\int_0^x f(u+y)\,du = \int_y^{x+y} f(z)\,dz = \int_0^{x+y} f(z)\,dz - \int_0^y f(z)\,dz.$$

9. *Решение.* Правая часть (10) не изменяется при замене x на y и y на x, поэтому $yf(x) = xf(y)$.

При $x \neq 0$ $f(x)\,x^{-1} = a$, где a — константа, т. е. $f(x) = ax$. Из аддитивности $f(x)$ вытекает, что последнее равенство справедливо и при $x = 0$.

§ 2

2. $f(x) = x^{\alpha}$; $f(x) = 0$ при $x > 0$.

4. $\begin{cases} |x|^c, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} |x|^c, & x > 0,\ c \neq 0; \\ -|x|^c, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ 0; 1; $\begin{cases} 1, & x > 0; \\ -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5. *Решение.* Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $\varphi(y)$ непрерывна при $y = y_0$, то для выбранного ε найдется такое $\delta_1 > 0$, что из $|y - y_0| < \delta_1$ следует $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Ввиду непрерывности $f(x)$ при $x = x_0$ для $\delta_1 > 0$ найдется $\delta > 0$, что из $|x - x_0| < \delta$ следует

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \delta.$$

Тогда

$$|\varphi(f(x)) - \varphi(y_0)| = |\varphi(f(x)) - \varphi(f(x_0))| < \varepsilon.$$

6. $\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$; $f(x) \equiv 0$; x^c; $f(x) \equiv 0$. Указание. Воспользоваться упражнением 5.

7. $cx^{\beta}\ln x$.

8. e^{cx}. Указание. Свести к уравнению Коши

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y).$$

§ 3

1. а) $x+a$; б) ae^x, $a \in R$; в) 1; г) c^x, $c > 0$; д) x; е) x^2.
2. 0, e^{x+2}, e^{-x-2}; $x+a$; $x+1$; ae^x.
3. ae^x; б) $c\ln x$; в) x^2; г) $a\sin x$.

§ 4

1. а) Да; б) да; в) нет; г) да. 3. Нет. 4. Нет.
5. а) Да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.

7. $\dfrac{6x+3}{5x}$. 8. Нет решений.

9. $\dfrac{b\sqrt[n]{x}}{a-1}$, если $x \geqslant 0$; $\dfrac{-b\sqrt[n]{-x}}{a-1}$, если $x < 0$.

10. $\dfrac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}$, $x \neq 0$; $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

11. $f(x) = -5$, если $x \neq 0$.

12. $\dfrac{4x-15}{3(1-x)}$, $x \neq 0$.

§ 5

2. а) $R \setminus \left\{-\dfrac{4}{3};\ 7\right\}$; б) $R \setminus \{2\}$.

4. $f_1 \circ f_2 = \dfrac{1}{-7x+5}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$; $f_2 \circ f_1 = \dfrac{x-3}{-x+4}$, $x \neq \dfrac{2}{3}$.

5. а) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. 6. $\dfrac{2x}{x+2}$, $x \neq 2$.

7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x}, & \text{если } x \neq -\dfrac{1}{3};\ -1; \\ a, & \text{если } x = -1 \quad (a \in R); \\ \dfrac{3}{5}a + \dfrac{16}{5}, & \text{если } x = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

8. $\dfrac{1}{x}$, $x \neq -2$; $\dfrac{1}{3}$. 9. $\dfrac{x}{x-2}$, $x \neq 1$; 3; $-\dfrac{1}{3}$; $-\dfrac{1}{2}$.

11. а) 4; б) 3; в) 2; г) 4; д) 2; е) 3.

14. $\begin{pmatrix} x_1 & -\dfrac{x_1^2 - x_1x_4 + x_4^2}{3x_3} \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, $x_1 \neq -x_4$. 15. $\dfrac{2}{x-1}$, $x \neq 3$.

§ 6

2. а) $ka^{\frac{5x}{4}}$, $k \in \boldsymbol{R}$; б) k; в) $\dfrac{6x}{5}$; г) $\dfrac{4}{3}$. 3. $\dfrac{x}{3}$.

4. а) $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x$; в) $c \ln x$. 5. kx.

6. $f(x) = g(x) + kx$, где $g(x)$ — периодическая функция с тем же периодом, что и $f(x)$, $k \in \boldsymbol{R}$.

7. $c\left(x + \dfrac{b}{k-1}\right)^2$, $c \in \boldsymbol{R}$. 8. $\dfrac{x(x+1)}{2}$.

9. а) $e^{1-(1-a)^x}$; б) $\dfrac{a}{x}$; в) e^{a^x}; г) $a^{\frac{x^2}{2}+cx}$.

10. $ax + \dfrac{x(x+1)}{2}$, $a \in \boldsymbol{R}$. Указание. Предварительно доказать, что $f(x)$ непрерывна при любых действительных x.

11. a^{cx}. 12. $cx + a$.

13. $\cos cx$. Указание. Положить $f(1) = \cos c$.

§ 8

1. а) $f(n) = n + 1$; б) $\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$.

2. $2 + m(m-1)$, где m — число плоскостей. *Решение.* Окружность, по которой m-я плоскость пересекает шар, пересекается каждой из остальных плоскостей в двух точках и, следовательно, делится на $2(m-1)$ частей. По обе стороны каждой из этих частей находятся 2 части сферы, которые обращаются в одну, если убрать m-ю окружность. Следовательно, число $F(m)$ кусков сферы при делении ее m плоскостями на $2(m-1)$ больше, чем $F(m-1)$ — число делений $m-1$ плоскостями:

$$F(m) = 2(m-1) + F(m-1),\ F(1) = 2;$$
$$F(m) = 2(1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (m-1)) = 2 + m(m-1);$$
$$F(m) = 2 + m(m-1).$$

3. $f(n) = \dfrac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}$. Указание. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1) \cdot (n+2) = 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) + 2 \cdot (2+1) \cdot (2+2) + 3 \cdot (3+1) \cdot (3+2) + \ldots + n(n+1)(n+2) = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 2(1 + 2 + \ldots + n)$.

4. а) $c_1 2^n + c_2 3^n$, где $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$; б) $(c_1 + c_2 n)2^n$, где $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$; в) $c_1 + c_2(-1)^n$, где $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$. 5. $7 + 3^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ацель Я. Некоторые общие методы в теории функциональных уравнений одной переменной. Новые применения функциональных уравнений.— Успехи мат. наук, 1956, т. 11, 3 (69), с. 1—68.
2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.
3. Дорофеев Г. М. Применение производных при решении задач в школьном курсе математики.— Математика в школе, 1980, № 5, с. 12—21.
4. Калужнин Л. А., Сущанский В. И. Преобразования и перестановки. М.: Наука, 1979. 112 с.
5. Колягин Ю. М. О функциональных уравнениях.— Математика в школе, 1959, № 5, с. 4—8.
6. Лопшиц А. М. Функциональные уравнения.— Квант, 1975, № 1, с. 30—35.
7. Призва Г. Й. Функціональні співвідношення.— В кн.: У світі математики. К.: Рад. школа, 1979, вип. 10, с. 55—71.
8. Смишляєв В. К., Смишляєва М. В. Найпростіші функціональні рівняння.— В кн.: У світі математики. К.: Рад. школа, 1978, вип. 9, с. 203—211.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. М.: Наука, 1969. Т. 1. 607 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Библиотечка физико-математической школы

Математика

Яков Соломонович Бродский,

Анатолий Константинович Слипенко

Функциональные уравнения

Редактор Л. П. Онищенко
Литредактор А. П. Ковальчук
Художественный редактор Е. В. Чурий
Технический редактор Л. Ф. Курышева
Корректор Л. Д. Мякоход

Информ. бланк № 7982

Сдано в набор 30.09.82. Подп. в печать 04.08.83. Формат 84×108 1/32. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печ. 5,04 усл. печ. л. 5,35 усл.-кр. отт. 5,01 уч.-изд. л. Тираж 7500. экз. Изд. № 5561. Зак. 2—2932. Цена 15 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа». 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Головного предприятия РПО «Полиграфкнига» в Харьковской городской типографии № 16, г. Харьков-3, ул. Университетская, 16. Зак. 1476.